

# Análise Matemática III - Turma Especial

## Ficha 6

A entregar até à aula prática de sexta-feira dia 31 de Outubro

1. Calcule o volume, o centróide e o momento de inércia em relação ao eixo dos  $zz$  (em função da massa total  $M$ ) dos sólidos homogêneos seguintes:

(a)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq r^2 \text{ e } z \in [0, h]\}$ , com  $r, h > 0$ ;

(b)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq rz \leq h(r - \sqrt{x^2 + y^2})\}$ , com  $r, h > 0$ ;

(c)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$ , com  $a, b, c > 0$ .

2. Os *versores das coordenadas polares* são os campos vectoriais definidos em cada ponto  $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  por

$$\mathbf{e}_r = (\cos \theta, \sin \theta);$$

$$\mathbf{e}_\theta = \frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta} = (-\sin \theta, \cos \theta).$$

Deste modo, a expressão da transformação de coordenadas  $(x, y) = \mathbf{g}(r, \theta)$  é

$$(x, y) \equiv \mathbf{x} = r\mathbf{e}_r.$$

- (a) Mostre que se  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  é um caminho duas vezes diferenciável representando a trajectória de uma partícula em  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  se tem

$$\ddot{\mathbf{x}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta$$

- (b) Supondo  $\dot{\theta} > 0$ , mostre que a área varrida pelo vector  $\mathbf{x}(t)$  entre os instantes  $t_0$  e  $t$  é

$$A(t) = \int_{t_0}^t \frac{1}{2} r^2(s) \dot{\theta}(s) ds.$$

- (c) Prove a *Segunda Lei de Kepler*: se  $\ddot{\mathbf{x}}$  é *radial* (i.e., se  $\ddot{\mathbf{x}}(t) = a(t)\mathbf{e}_r(t)$ ) então  $\dot{A}$  é constante.

3. Seja  $I \subset \mathbb{R}^n$  um intervalo compacto e  $f : I \times ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  contínua. Mostre que  $F : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$F(t) = \int_I f(\mathbf{x}, t) dV_n(\mathbf{x})$$

é contínua.

4. Use a Regra de Leibnitz para provar o Lema de Schwarz.

**Não precisam de entregar:**

5. Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto mensurável à Jordan. Mostre que  $\text{int}(A)$  e  $\overline{A}$  são também mensuráveis à Jordan, e que

$$V_n(\text{int}(A)) = V_n(\overline{A}) = V_n(A).$$