Análise Matemática III - Turma Especial

Exercícios sobre o Integral de Lebesgue

1. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{r^n}{1+r^{n+2}}dr.$
2. Calcule o limite $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{n}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,dx.$
3. Seja $f:]0,+\infty[\,\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}$. Prove que f é integrável em $]0,+\infty[$.
4. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sqrt[n]{x}}{1+x^2}dx.$
5. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{\cos(x/n)}{1+x^2}dx.$
6. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|x|}\cos^n(x)dx.$
7. Decida se existe ou não o integral $\int_1^{\infty}\left(t\operatorname{sen}\left(\frac{1}{t}\right)-1\right)dt.$
8. Decida se existe ou não o integral $\int_1^{\infty}\left(1-e^{-1/t^2}\right)dt.$
9. Calcule $\int_B\frac{1}{(x^2+y^2)^2}dxdy$ em que $B=\{(x,y)\mathbb{R}^2 : x^2+y^2>1\}$.
10. Use o teorema da Convergência Dominada para calcular
$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2}e^{-(x^2+y^2)^n}dxdy.$$
11. Prove que a função dada por $f(x)=\dfrac{\log x}{x^2}$ é integrável no conjunto $[1,\ +\infty[$ e calcule o respectivo integral.
12. Considere o conjunto $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2y^2<1,\ x>1,\ 0<y<1\}$ e a função $f_\alpha:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ \alpha\in\mathbb{R}$, definida por $f_\alpha(x,y)=x^\alpha$.
    i) Determine os valores de $\alpha\in\mathbb{R}$ para os quais f_α é integrável em S.
    ii) Para cada α determinado na alínea anterior, calcule $\int_S f_\alpha$. Justifique todos os cálculos.
13. Seja $f_n:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ com $f_n(x,y)=\dfrac{1+\cos^n(x-y)}{(x^2+y^2+1)^2}$. Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2}f_n$ existe e calcule o seu valor. Justifique.

14. Seja γ_n o gráfico da função $f_n(x) = x^{\frac{n+1}{n}}$ definida no intervalo $[0,1]$. Seja $l(\gamma_n)$ o comprimento de γ_n. Mostre que $\lim_{n\to\infty} l(\gamma_n) = \sqrt{2}$.

15. Calcule, justificadamente,

    i)
    $$\lim_{k\to\infty} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1+(|x|+|y|)^k}\, dx\, dy;$$

    ii)
    $$\iiint_D \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^3}\, dxdydz$$
    em que $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 > 1\}$;

    iii)
    $$\lim_{k\to\infty} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1+(x^2+y^2)^{k+1}}\, dxdy.$$

16. Sejam $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\quad n \in \mathbb{N}$, as funções definidas por $f_n(x,y) = \dfrac{e^{-(x^2+y^2)^n}}{1+x^2+y^2}$. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} f_n$. Justifique os cálculos.

17. Sejam $f_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(k \in \mathbb{N})$, as funções definidas por
    $$f_k(x,y) = \frac{1+(\cos(x^2+y^2))^{2k}}{1+(x^2+y^2)^{2k}}.$$

    i) Prove que as funções f_k são integráveis em $\mathbb{R}^2$.
    ii) Calcule $\lim\limits_{k\to\infty} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} f_k$. Justifique todos os cálculos.

18. Considere a função
    $$f(t) = \int_0^t \operatorname{sen}(x) e^{-tx^2} dx$$
    em que $t > 0$. Prove que f é diferenciável e escreva uma expressão para a derivada $f'(t)$.

19. Considere a função real de variável real F definida para $t > 0$ por
    $$F(t) = \int_t^\infty e^{-tx^2} dx.$$

    i) Verifique que F está bem definida e calcule o limite $\lim\limits_{t\to 0^+} F(t)$.
    ii) Verifique que F é diferenciável em todo o seu domínio e calcule uma espressão para a sua derivada.

20. Seja $f(t) = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}(ts)}{s} ds \quad (t > 0)$.

    a) Justifique que f é diferenciável em $]0, +\infty[$.
    b) Calcule $f'(t)$.

21. Para cada $t > 0$, seja $F(t) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+x^2}dx$.

    a) Mostre que F está bem definida.

    b) Mostre que se verifica a relação: $F''(t) + F(t) = 1/t$.

22. Mostre que, para cada $t > 0$, se tem: $\ln t = \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-xt}}{x}dx$.