

# Análise Matemática III - Turma Especial

## Ficha Extra 4 - Curvas no Espaço

*Não precisam de entregar esta ficha*

1. Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo aberto,  $\mathbf{g} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma parametrização  $C^3$  para a curva (variedade-1)  $C \subset \mathbb{R}^3$ ,  $t_0 \in I$  e  $s : I \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{\mathbf{g}}(u)\| du$$

a função comprimento de arco. Mostre que  $s(t)$  é invertível e que

$$\mathbf{t}(s) = \frac{d}{ds} [\mathbf{g}(t(s))]$$

é um vector tangente unitário a  $C$ .

2. Mostre que

$$\mathbf{t}(s) \cdot \frac{d\mathbf{t}}{ds}(s) = 0.$$

Define-se a *curvatura* de  $C$  no ponto  $\mathbf{g}(t(s))$  como sendo

$$\kappa(s) = \left\| \frac{d\mathbf{t}}{ds}(s) \right\|,$$

e o *vector normal principal* como

$$\mathbf{n}(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \frac{d\mathbf{t}}{ds}(s)$$

em todos os pontos de  $C$  onde a curvatura não se anula.

3. Definimos o *vector binormal* através da fórmula

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s).$$

Mostre que

$$\mathbf{b}(s) \cdot \frac{d\mathbf{b}}{ds}(s) = \mathbf{t}(s) \cdot \frac{d\mathbf{b}}{ds}(s) = 0.$$

Portanto existe uma função  $\tau(s)$ , dita a *torsão* de  $C$  no ponto  $\mathbf{g}(t(s))$ , tal que

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds}(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s).$$

4. Mostre que

$$\mathbf{n}(s) \cdot \frac{d\mathbf{n}}{ds}(s) = 0;$$

$$\mathbf{t}(s) \cdot \frac{d\mathbf{n}}{ds}(s) = -\kappa(s);$$

$$\mathbf{b}(s) \cdot \frac{d\mathbf{n}}{ds}(s) = -\tau(s);$$

i.e., que

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds}(s) = -\kappa(s)\mathbf{t}(s) - \tau(s)\mathbf{b}(s).$$

5. Mostre que uma curva de curvatura zero é um segmento de recta.

6. Mostre que uma curva de torsão zero e curvatura constante não nula é um arco de circunferência.

7. Calcule a curvatura e a torsão da hélice descrita pela parametrização  $\mathbf{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\mathbf{g}(t) = (r \cos t, r \sin t, ht)$$

com  $r, h > 0$ . Mostre que uma curva de torsão e curvatura constantes não nulas é um arco de hélice (*teorema de Lancret*).

8. O *raio de curvatura* de  $C$  é definido por

$$r(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$$

em todos os pontos de  $C$  nos quais a curvatura não se anula. Mostre que

$$\ddot{\mathbf{g}}(t) = \dot{v}(t)\mathbf{t}(s(t)) + \frac{v^2(t)}{r(s(t))}\mathbf{n}(s(t)),$$

onde  $v(t) = \|\dot{\mathbf{g}}(t)\|$ . (Note que a fórmula acima dá a habitual decomposição da aceleração nas suas componentes tangencial e centrípeta).

9. Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo aberto. Recorde que  $\mathbf{f}, \mathbf{g} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  têm *contacto de ordem  $k$*  em  $s_0 \in I$  se são  $k$  vezes diferenciáveis em  $s_0$  e  $\mathbf{f}^{(i)}(s_0) = \mathbf{g}^{(i)}(s_0)$  para  $i = 0, 1, \dots, k$ . Mostre que duas curvas  $C_1, C_2$  possuem a mesma curvatura em  $\mathbf{x}_0 \in C_1 \cap C_2$  sse têm contacto de segunda ordem quando parametrizadas pelo comprimento de arco. Conclua que o raio de curvatura de uma curva é o raio da única circunferência que tem contacto de segunda ordem com a curva nesse ponto.

10. Mostre que duas curvas  $C_1, C_2$  possuem as mesmas curvatura e torsão em  $\mathbf{x}_0 \in C_1 \cap C_2$  sse têm contacto de terceira ordem quando parametrizadas pelo comprimento de arco. Dê uma interpretação geométrica da torsão.