

# Análise Matemática III - Turma Especial

## Ficha Extra 5 - Geodésicas e Curvatura de Superfícies

*Não precisam de entregar esta ficha*

1. Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície (variedade-2) orientável e  $\gamma : [t_0, t_1] \times \mathbb{R} \rightarrow S$  (de classe  $C^2$ ) uma família a um parâmetro de caminhos em  $S$  unindo os pontos  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in S$ , i.e., tal que

$$\begin{aligned}\gamma(t_0, \alpha) &= \mathbf{x}_0 \\ \gamma(t_1, \alpha) &= \mathbf{x}_1\end{aligned}$$

para todo o  $\alpha \in \mathbb{R}$ . O comprimento do caminho  $\alpha$  é

$$L(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} \|\dot{\gamma}(t, \alpha)\| dt,$$

onde  $\dot{\gamma} = \frac{\partial \gamma}{\partial t}$ . Suponha que existe um caminho de comprimento mínimo, correspondendo a  $\alpha = 0$ . Mostre que

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\dot{\gamma}(t, 0)}{\|\dot{\gamma}(t, 0)\|} \right) \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha}(t, 0) dt = 0$$

(**Sugestão:** Derive  $L(\alpha)$  e integre por partes).

2. Mostre que o caminho de comprimento mínimo  $\gamma(t) = \gamma(t, 0)$  tem que satisfazer

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \right) \in T_{\gamma(t)}^\perp S$$

para todo o  $t \in ]t_0, t_1[$ . Um caminho satisfazendo esta equação diz-se uma *geodésica* de  $S$ .

3. Seja  $S$  a superfície de revolução descrita em coordenadas cilíndricas por  $r = f(z)$ , onde  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^+$  é uma função de classe  $C^2$  no intervalo aberto  $I$ . Mostre que as circunferências correspondentes aos pontos de extremo local de  $f$  são geodésicas. Mostre ainda que as secções da superfície por semiplanos de  $\theta$  constante são também geodésicas. Particularize no caso em que  $S$  é uma superfície esférica e a superfície de um toro.
4. Seja  $\mathbf{g} : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma parametrização de  $S$ . A *aplicação de Gauss* é a aplicação  $\mathbf{n} : S \rightarrow S^2$  ( $S^2$  designa a superfície esférica de raio 1 em  $\mathbb{R}^3$ ) dada por

$$\mathbf{n}(t^1, t^2) = \frac{\partial_1 \mathbf{g} \times \partial_2 \mathbf{g}}{\|\partial_1 \mathbf{g} \times \partial_2 \mathbf{g}\|}.$$

Mostre que

$$\mathbf{n} \cdot \partial_1 \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \partial_2 \mathbf{n} = 0,$$

e que portanto

$$\partial_1 \mathbf{n} \times \partial_2 \mathbf{n} = \kappa(t^1, t^2) \partial_1 \mathbf{g} \times \partial_2 \mathbf{g}.$$

A função  $\kappa(t^1, t^2)$  diz-se a *curvatura* de  $S$  no ponto  $\mathbf{g}(t^1, t^2)$ .

5. Mostre que

$$|\kappa(t^1, t^2)| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{V_2(\mathbf{n} \circ \mathbf{g}(B_\varepsilon(t^1, t^2)))}{V_2(\mathbf{g}(B_\varepsilon(t^1, t^2)))}.$$

6. Mostre que

$$\partial_i \mathbf{n} = \sum_{j=1}^2 a_{ij} \partial_j \mathbf{g}$$

e que

$$\partial_i \mathbf{n} \cdot \partial_j \mathbf{g} = -\mathbf{n} \cdot \partial_i \partial_j \mathbf{g}.$$

Conclua que

$$(a_{ij}) \cdot (g_{jk}) = -(b_{ik}),$$

onde

$$g_{ij} = \partial_i \mathbf{g} \cdot \partial_j \mathbf{g}$$

e

$$b_{ij} = \mathbf{n} \cdot \partial_i \partial_j \mathbf{g}.$$

7. Mostre que

$$\partial_1 \mathbf{n} \times \partial_2 \mathbf{n} = \det(a_{ij}) \partial_1 \mathbf{g} \times \partial_2 \mathbf{g}.$$

Conclua que

$$\kappa(t^1, t^2) = \frac{\det(b_{ij})}{\det(g_{ij})}.$$

8. Seja  $M \subset \mathbb{R}^n$  uma variedade- $m$ . Uma função  $\mathbf{f} : M \rightarrow \mathbb{R}^p$  diz-se *diferenciável* se para qualquer parametrização  $\mathbf{g} : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M \cap U$  a função  $\mathbf{f} \circ \mathbf{g} : V \rightarrow \mathbb{R}^p$  é diferenciável. Se

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^m v^i \partial_i \mathbf{g} \in T_{\mathbf{g}(\mathbf{t})},$$

define-se

$$\partial_{\mathbf{v}} \mathbf{f} = \sum_{i=1}^m v^i \partial_i (\mathbf{f} \circ \mathbf{g}).$$

Mostre que esta definição não depende da escolha da parametrização.

9. Defina-se a *primeira forma fundamental*  $g : T_{\mathbf{x}}M \times T_{\mathbf{x}}M \rightarrow \mathbb{R}$  através de

$$g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w},$$

e a *segunda forma fundamental*  $b : T_{\mathbf{x}}M \times T_{\mathbf{x}}M \rightarrow \mathbb{R}$  mediante

$$b(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\mathbf{w} \cdot \partial_{\mathbf{v}} \mathbf{n}.$$

Mostre que escrevendo

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^2 v^i \partial_i \mathbf{g};$$

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^2 w^i \partial_i \mathbf{g},$$

se tem

$$g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} v^i w^j;$$

$$b(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i,j=1}^2 b_{ij} v^i w^j.$$

Conclua que  $g$  e  $b$  são de facto formas quadráticas (i.e., tensores simétricos). Estes tensores são também conhecidos como o *tensor da métrica* e o *tensor de curvatura extrínseca*.

10. Mostre que a condição para uma curva ser uma geodésica pode ser escrita como

$$\partial_t \mathbf{t} = \lambda \mathbf{n},$$

em cada ponto da curva, onde  $\mathbf{t}$  é o vector tangente unitário à curva. Note que  $|\lambda|$  é a curvatura da geodésica.

11. Mostre que

$$|b(\mathbf{t}, \mathbf{t})|$$

é a curvatura da geodésica de vector tangente  $\mathbf{t}$ . Mostre que os vectores próprios de  $(b_{ij})$  correspondem às geodésicas de curvatura máxima e mínima (ditas as *curvaturas principais de  $S$* ), e que estas são exactamente os módulos dos valores próprios correspondentes. Conclua que o módulo da curvatura é o produto das curvaturas principais. (Isto mostra que o módulo da curvatura não depende da escolha da parametrização).

12. Mostre que se  $S$  tem curvatura positiva em  $\mathbf{x}_0$  então existe uma vizinhança de  $\mathbf{x}_0$  na qual todos os pontos de  $M$  estão do mesmo lado do plano tangente, e que se  $S$  tem curvatura negativa em  $\mathbf{x}_0$  então em qualquer vizinhança de  $\mathbf{x}_0$  existem pontos de  $M$  dos dois lados do plano tangente. (Isto mostra que o sinal da curvatura não depende da escolha da parametrização).
13. Calcule a curvatura de uma superfície cilíndrica, de uma superfície cónica, de uma superfície esférica de raio  $r > 0$  e da superfície de um toro de raios  $R > r > 0$  (esta última apenas nos pontos de intersecção das geodésicas que determinou em 3).
14. As componentes do tensor de curvatura de Riemann são dadas pela fórmula

$$R_{ijkl} = \left[ \partial_i (\partial_j \partial_k \mathbf{g})^\top - \partial_j (\partial_i \partial_k \mathbf{g})^\top \right] \cdot \partial_l \mathbf{g},$$

onde  $^\top$  designa a projecção no espaço tangente a  $S$ . Mostre que

$$R_{ijkl} = b_{il} b_{jk} - b_{ik} b_{jl}.$$