Resumos de AMIII

2 de Janeiro de 2004

1. Revisões de Cálculo Diferencial

1. Se $U \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^m$ uma função (portanto $\mathbf{f} = (f^1, \ldots, f^m)), \mathbf{x}_0 \in U$ e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, então a *derivada direccional* de $\mathbf{f}$ segundo $\mathbf{v}$ no ponto $\mathbf{x}_0$ é

$$\partial_{\mathbf{v}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t\to 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{t} = \frac{d}{dt}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v})|_{t=0}$$

(caso o limite exista).

2. A i-ésima *derivada parcial* de $\mathbf{f}$ é

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x^i} \equiv \partial_i \mathbf{f} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^i} \\ \ldots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^i} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \partial_i f^1 \\ \ldots \\ \partial_i f^n \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_{\mathbf{e}_i}\mathbf{f}.$$

3. $\mathbf{f}$ diz-se *diferenciável* em $\mathbf{x}_0$ se existe uma transformação linear $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (representada por uma matriz $m \times n$) tal que

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = \mathbf{0}.$$

4. Se $\mathbf{f}$ é diferenciável em $\mathbf{x}_0$ então

$$\partial_{\mathbf{v}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = D_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{v}.$$

Em particular, $D\mathbf{f}$ é representada na base canónica pela *matriz Jacobiana*

$$D\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1 f^1 & \ldots & \partial_n f^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \partial_1 f^m & \ldots & \partial_n f^m \end{bmatrix}.$$

5. $\mathbf{f}$ diz-se de classe C^1 se as derivadas parciais $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$ $(i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$ são funções contínuas.

6. $\mathbf{f}$ $C^1 \Rightarrow \mathbf{f}$ diferenciável.

7. Se $\mathbf{f} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $\mathbf{x}_0 \in U$, e $\mathbf{g} : V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ é diferenciável em $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \in V$, então $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ é diferenciável em $\mathbf{x}_0$ e

$$D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}_0) = D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0).$$

Em coordenadas $(x^1, \dots, x^n)$ em $\mathbb{R}^n$ e $(y^1, \dots, y^m)$ em $\mathbb{R}^m$, tem-se

$$\frac{\partial g^i}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g^i}{\partial y^k} \frac{\partial f^k}{\partial x^j}$$

(*regra da cadeia*).

8. Derivadas parciais de ordem superior:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \right) = \partial_i \partial_j f;$$

f diz-se de classe C^2 se todas as derivadas parciais de segunda ordem são funções contínuas.

9. *Lema de Schwarz:* f $C^2 \Rightarrow \partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$.

2. Função Inversa e Função Implícita

1. O *jacobiano* da função diferenciável $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é a função

$$J\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \det D\mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

2. *Teorema da Função Inversa:* Seja $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^k $(k \geq 1)$ e $\mathbf{x}_0 \in D$ tal que $J\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \neq 0$. Então $\mathbf{f}$ é *localmente C^k-invertível, i.e.:*
   (i) Existe um conjunto aberto $U \subset D$ contendo $\mathbf{x}_0$ tal que $\mathbf{f}|_U$ é injectiva;
   (ii) $V = \mathbf{f}(U)$ é aberto;
   (iii) $\mathbf{f}^{-1} : V \to U$ é de classe C^k.

   Além disso, $D\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = [D\mathbf{f}(\mathbf{x})]^{-1}$ para $\mathbf{x} \in U$.

3. Seja $F \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado. Uma função $\mathbf{f} : F \to \mathbb{R}^n$ diz-se uma *contracção* se $\mathbf{f}(F) \subset F$ e existe $c < 1$ tal que

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_2)\| \leq c\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$$

(em particular, $\mathbf{f}$ é contínua).

4. Seja A um conjunto e $f : A \to A$ uma função. $x \in A$ diz-se um *ponto fixo* de f se $f(x) = x$.

5. *Teorema do ponto fixo:* Uma contracção possui um e um só ponto fixo.

6. Uma função $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é contínua *sse* a imagem inversa de qualquer aberto é a intersecção de um aberto com D.

7. *Teorema da Função Implícita:* Seja $\mathbf{F} : D \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ uma função de classe C^k $(k \geq 1)$ e $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in D$ tal que $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{0}$ e $\det \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0$. Então existe uma vizinhança aberta $U \times V \ni (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ e uma função de classe C^k $\mathbf{f} : U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^m$ tais que

$$\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \times V : \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}\} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \times V : \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})\}.$$

Além disso,

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = -\left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)\right]^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0).$$

3. Variedades Diferenciáveis

1. O *gráfico* de uma função $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n-m}$ é o conjunto

$$\mathrm{Graf}(\mathbf{f}) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \in D \text{ e } \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})\}.$$

2. Um conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma *variedade diferenciável de dimensão* $m \in \{1, \ldots, n-1\}$ *e classe* C^k $(k \geq 1)$ se para qualquer ponto $\mathbf{x}_0 \in M$ existe uma vizinhança $U \ni \mathbf{x}_0$ e uma função de classe C^k $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n-m}$ (D aberto) tais que

$$M \cap U = \mathrm{Graf}(\mathbf{f}) \cap U$$

   para alguma ordenação das funções coordenadas de $\mathbb{R}^n$.

3. Uma variedade de dimensão 0 é um conjunto do pontos isolados; uma variedade de dimensão n é um conjunto aberto.

4. $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade diferenciável de dimensão m e classe C^k *sse* para qualquer ponto $\mathbf{x}_0 \in M$ existe uma vizinhança $U \ni \mathbf{x}_0$ e uma função de classe C^k $\mathbf{F} : U \to \mathbb{R}^{n-m}$ tais que
   (i) $M \cap U = \{\mathbf{x} \in U : \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$;
   (ii) $\operatorname{rank} D\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = n - m$ (i.e., é máxima).

5. Um *caminho* em $\mathbb{R}^n$ é simplesmente uma função contínua $\mathbf{g} : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

6. Um vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ diz-se um *vector tangente* à variedade diferenciável M no ponto $\mathbf{x}_0$ se existe um caminho diferenciável $\mathbf{g} :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ tal que $\mathbf{g}(0) = \mathbf{x}_0$ e $\frac{d\mathbf{g}}{dt}(0) = \mathbf{v}$.

7. Se $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade de dimensão m, o conjunto $T_{\mathbf{x}_0}M$ de todos os vectores tangentes a M no ponto $\mathbf{x}_0 \in M$ é um espaço vectorial de dimensão m, dito o *espaço tangente* a M no ponto $\mathbf{x}_0$. O seu complemento ortogonal $T_{\mathbf{x}_0}^{\perp}M$ é um espaço vectorial de dimensão $n - m$, dito o *espaço normal* a M no ponto $\mathbf{x}_0$.

8. Sejam $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade de dimensão m, $\mathbf{x}_0 \in M$, $U \ni \mathbf{x}_0$ aberto e $\mathbf{F} : U \to \mathbb{R}^{n-m}$ tais que $M \cap U = \{\mathbf{x} \in U : \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ com $\operatorname{rank} D\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = n - m$. Então

$$T_{\mathbf{x}_0}^{\perp}M = \operatorname{span}\{\nabla F^1(\mathbf{x}_0), \ldots, \nabla F^{n-m}(\mathbf{x}_0)\}.$$

9. *Teorema dos Extremos Condicionados:* Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade de dimensão m e $\mathbf{x}_0 \in M$. Se a restrição de f a M tem um extremo local em $\mathbf{x}_0 \in M$ então $\nabla f(\mathbf{x}_0) \in T_{\mathbf{x}_0}^{\perp}M$.

10. *Regra dos Multiplicadores de Lagrange:* Nas condições do teorema anterior, se $U \ni \mathbf{x}_0$ é um aberto e $\mathbf{F} : U \to \mathbb{R}^{n-m}$ é tal que $M \cap U = \{\mathbf{x} \in U : \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ com $\operatorname{rank} D\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = n - m$, existem constantes $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-m} \in \mathbb{R}$ (ditas os *multiplicadores de Lagrange*) tais que

$$\nabla(f + \lambda_1 F^1 + \ldots + \lambda_{n-m} F^{n-m})(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}.$$

4. Integração em $\mathbb{R}^n$

1. $I \subset \mathbb{R}^n$ é um *intervalo* se $I = I_1 \times \ldots \times I_n$, onde cada I_k é um intervalo de $\mathbb{R}$. I é limitado/aberto/fechado *sse* cada I_k é limitado/aberto/fechado. Se I é um intervalo compacto com $I_k = [a_k, b_k]$, o seu *volume* n*-dimensional* é

$$V_n(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \ldots (b_n - a_n).$$

Se I é um intervalo limitado, define-se $V_n(I) = V_n\left(\bar{I}\right)$. Uma *partição* do intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}$ é um conjunto finito $P = P_1 \times \ldots \times P_n$, onde cada P_k é uma partição do intervalo $I_k = [a_k, b_k]$ (i.e., P_k é um subconjunto finito de I_k contendo a_k, b_k). Uma partição de I subdivide I num número finito de subintervalos J_α. Uma função $s : I \to \mathbb{R}$ diz-se uma *função em escada* se existe uma partição P de I tal que s é constante (igual a s_α) no interior de cada subintervalo J_α, sendo o seu *integral* o número real

$$\int_I s = \sum_\alpha s_\alpha V_n(J_\alpha).$$

2. Seja $I \subset \mathbb{R}^n$ um intervalo compacto e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função *limitada*. O *integral superior* de f em I é o número real

$$\overline{\int_I} f = \inf \left\{ \int_I t : t \text{ é em escada e } t(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in I \right\}.$$

O *integral inferior* de f em I é o número real

$$\underline{\int_I} f = \sup \left\{ \int_I s : s \text{ é em escada e } s(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in I \right\}.$$

A função f diz-se *integrável à Riemann* em I se os seus integrais superior e inferior coincidem, e nesse caso define-se o seu *integral* como sendo

$$\int_I f = \underline{\int_I} f = \overline{\int_I} f.$$

As seguintes notações são também utilizadas para o integral de f:

$$\int_I f = \int_I f dV_n = \int_I f(\mathbf{x}) dV_n(\mathbf{x}) = \int_I f\left(x^1, \ldots, x^n\right) dx^1 \ldots dx^n.$$

3. O conjunto $R(I)$ de todas as funções integráveis à Riemann no intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}^n$ é um espaço vectorial, e a aplicação

$$R(I) \ni f \mapsto \int_I f \in \mathbb{R}$$

é linear.

4. *Teorema de Fubini:* Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^m$ intervalos compactos e $F : A \times B \to \mathbb{R}$ uma função integrável à Riemann. Então

$$\begin{aligned}
\int_{A\times B} f &= \int_A \left(\underline{\int_B} f_{\mathbf{x}} \right) dV_n(\mathbf{x}) = \int_A \left(\overline{\int_B} f_{\mathbf{x}} \right) dV_n(\mathbf{x}) \\
&= \int_B \left(\underline{\int_A} f_{\mathbf{y}} \right) dV_m(\mathbf{y}) = \int_B \left(\overline{\int_A} f_{\mathbf{y}} \right) dV_m(\mathbf{y})
\end{aligned}$$

onde $f_{\mathbf{x}} : B \to \mathbb{R}$ e $f_{\mathbf{y}} : A \to \mathbb{R}$ satisfazem $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ e todos os integrais acima existem.

5. Diz-se que $A \subset \mathbb{R}^n$ tem *medida nula* se para todo o $\varepsilon > 0$ existe uma família numerável de intevalos $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k \qquad \text{e} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} V_n(I_k) < \varepsilon.$$

6. *Propriedades de conjuntos de medida nula:*
   (i) Um subconjunto de um conjunto de medida nula tem medida nula;
   (ii) A união de uma família numerável de conjuntos de medida nula tem medida nula;
   (iii) O gráfico de uma função contínua $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tem medida nula em $\mathbb{R}^{m+n}$.
7. Uma família $\{U_\alpha\}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ diz-se uma *cobertura* de $A \subset \mathbb{R}^n$ se $A \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$. A cobertura diz-se *aberta* se cada um dos conjuntos $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ é aberto. Uma *subcobertura* de $\{U_\alpha\}$ é uma subfamília de $\{U_\alpha\}$ que é ainda uma cobertura de A.
8. *Teorema de Heine-Borel:* $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto *sse* toda a cobertura aberta de K admite uma subcobertura finita.
9. Uma função $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diz-se *uniformemente contínua* em D se para todo o $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo o $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$ se tem

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \varepsilon \Rightarrow \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\| < \delta.$$

10. *Teorema de Heine-Cantor:* Se $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto e $\mathbf{f} : K \to \mathbb{R}^m$ é contínua então $\mathbf{f}$ é uniformemente contínua em K.
11. A *oscilação* da função limitada $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ no *conjunto* $A \subset D$ é o número real

$$o(f, A) = \sup_{\mathbf{x}\in A} f(\mathbf{x}) - \inf_{\mathbf{x}\in A} f(\mathbf{x}).$$

   A *oscilação* de f no *ponto* $\mathbf{x} \in D$ é o número real

$$o(f, \mathbf{x}) = \lim_{\delta\to 0^+} o(f, B_\delta(\mathbf{x})).$$

   A função f é contínua em $\mathbf{x} \in D$ *sse* $o(f, \mathbf{x}) = 0$.
12. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ e $P(\mathbf{x})$ uma proposição dependente de $\mathbf{x} \in A$. Diz-se que $P(\mathbf{x})$ é *verdadeira quase em toda a parte (q.t.p.) em* A se o conjunto $\{\mathbf{x} \in A : P(\mathbf{x}) \text{ é falsa }\}$ tem medida nula.
13. *Critério de integrabilidade de Lebesgue:* Seja $I \subset \mathbb{R}^n$ um intervalo compacto. Uma função limitada $f : I \to \mathbb{R}$ é integrável à Riemann em I *sse* é contínua q.t.p. em I.
14. Seja $I \subset \mathbb{R}^n$ um intervalo. A *função característica* do conjunto $A \subset I$ é a função $\chi_A : I \to \mathbb{R}$ definida por

$$\chi_A(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 \text{ se } \mathbf{x} \in A \\ 0 \text{ se } \mathbf{x} \notin A \end{cases}$$

15. Seja $I \subset \mathbb{R}^n$ um intervalo compacto. Um conjunto $A \subset I$ diz-se *mensurável à Jordan* em I se χ_A é integrável à Riemann em I, e o *volume n-dimensional* de A é

$$V_n(A) = \int_I \chi_A.$$

Se $f : I \to \mathbb{R}$ é integrável à Riemann em I, define-se

$$\int_A f = \int_I f\chi_A$$

(portanto $V_n(A) = \int_A 1$).

16. A família $J(I)$ de todos os subconjuntos do intervalo compacto I que são mensuráveis à Jordan é uma *álgebra de conjuntos* em I, i.e.,
    (i) $I \in J(I)$;
    (ii) $A \in J(I) \Rightarrow I \setminus A \in J(I)$;
    (iii) $A, B \in J(I) \Rightarrow A \cap B \in J(I)$.
17. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é mensurável à Jordan *sse* é limitado e a sua fronteira tem medida nula.
18. O *suporte* de uma função $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é o conjunto

$$\operatorname{supp}(\varphi) = \overline{\varphi^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})}.$$

19. *Teorema da partição da unidade:* Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{O}$ uma cobertura aberta de A. Então existe uma família Φ de funções $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ e suporte compacto com as seguintes propriedades:
    (i) Para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tem-se $0 \leq \varphi(\mathbf{x}) \leq 1$;
    (ii) Para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ existe um aberto $U_\mathbf{x} \ni \mathbf{x}$ tal que apenas finitas funções $\varphi \in \Phi$ não se anulam em $U_\mathbf{x}$;
    (iii) Para cada $\mathbf{x} \in A$ temos

$$\sum_{\varphi \in \Phi} \varphi(\mathbf{x}) = 1$$

    (por (ii) esta soma faz sentido);
    (iv) Para cada $\varphi \in \Phi$ existe um aberto $U \in \mathcal{O}$ tal que $\operatorname{supp}(\varphi) \subset U$.

    (Φ diz-se uma *partição da unidade para A subordinada a $\mathcal{O}$*).
20. Qualquer partição da unidade para um compacto $A \subset \mathbb{R}^n$ é finita; qualquer partição da unidade para um aberto $A \subset \mathbb{R}^n$ é numerável.
21. Uma cobertura aberta $\mathcal{O}$ do aberto $A \subset \mathbb{R}^n$ diz-se *admissível* se $A = \bigcup_{U \in \mathcal{O}} U$.
22. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f : A \to \mathbb{R}$ contínua q.t.p. em A e limitada em cada compacto contido em A. Seja $\mathcal{O}$ uma cobertura admissível de A e Φ uma partição da unidade para A subordinada a $\mathcal{O}$. Diz-se que f é *integrável* em A se a série de termos não negativos

$$\sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi |f|$$

    converge. Se f é integrável, o seu *integral* é a soma da série absolutamente convergente

$$\int_A f = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi f.$$

23. (i) Se Ψ é outra partição da unidade subordinada à cobertura admissível $\mathcal{O}'$ de A, então

$$\sum_{\psi\in\Psi}\int_A \psi|f|$$

também converge e

$$\sum_{\varphi\in\Phi}\int_A \varphi f = \sum_{\psi\in\Psi}\int_A \psi f$$

(i.e., a definição anterior não depende da escolha da partição da unidade para A).

(ii) Se A e f são limitados então f é integrável em A.

(iii) Se A é mensurável à Jordan e f é limitada então $\int_A f$ determinado de acordo com a definição acima coincide com o valor para $\int_A f$ definido anteriormente (i.e., a definição acima é uma extensão da noção de integral de Riemann num aberto mensurável à Jordan).

24. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Uma *transformação de coordenadas* em A é uma função $\mathbf{g} : A \to \mathbb{R}^n$ injectiva, de classe C^1 e tal que $J\mathbf{g}(\mathbf{x}) \neq 0$ para todo o $\mathbf{x} \in A$.

25. *Teorema de mudança de variáveis:* Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $\mathbf{g} : A \to \mathbb{R}^n$ uma tranformação de coordenadas e $f : \mathbf{g}(A) \to \mathbb{R}$ integrável. Então

$$\int_{\mathbf{g}(A)} f = \int_A (f\circ\mathbf{g})|J\mathbf{g}|.$$

26. *Coordenadas polares* em $\mathbb{R}^2$: São as coordenadas $(r,\theta) \in]0,+\infty[\times]0,2\pi[$ relacionadas com as coordenadas Cartesianas usuais (x,y) mediante a mudança de coordenadas

$$(x,y) = \mathbf{g}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta).$$

O Jacobiano desta transformação é

$$J\mathbf{g}(r,\theta) = r.$$

27. *Coordenadas cilíndricas* em $\mathbb{R}^3$: São as coordenadas $(r,\theta,z) \in]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times\mathbb{R}$ relacionadas com as coordenadas Cartesianas usuais (x,y,z) mediante a mudança de coordenadas

$$(x,y,z) = \mathbf{g}(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z).$$

O Jacobiano desta transformação é

$$J\mathbf{g}(r,\theta,z) = r.$$

28. *Coordenadas esféricas* em $\mathbb{R}^3$: São as coordenadas $(r,\theta,\varphi) \in]0,+\infty[\times]0,\pi[\times]0,2\pi[$ relacionadas com as coordenadas Cartesianas usuais (x,y,z) mediante a mudança de coordenadas

$$(x,y,z) = \mathbf{g}(r,\theta,\varphi) = (r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, r\cos\theta).$$

O Jacobiano desta transformação é

$$J\mathbf{g}(r,\theta,\varphi) = r^2\operatorname{sen}\theta.$$

29. Se A é mensurável à Jordan e é dada uma *função densidade de massa* $\rho : A \to \mathbb{R}^+$, integrável à Riemann em A, define-se:
    (i) O *volume* n-dimensional de A:
    $$V = V_n(A) = \int_A 1 dV_n.$$
    (ii) A *massa* de A:
    $$M = \int_A \rho dV_n.$$
    (iii) A coordenada k do *centro de massa* de A:
    $$x_{CM}^k = \frac{1}{M} \int_A x^k \rho dV_n.$$
    (iv) A coordenada k do *centróide* de A:
    $$x_C^k = \frac{1}{V} \int_A x^k dV_n.$$
    (v) O *momento de inércia* de A em relação ao eixo $\mathbb{R}\mathbf{e}_k$:
    $$I_k = \int_A \sum_{i \neq k} (x^i)^2 \rho dV_n.$$

30. *Regra de Leibnitz:* Seja $I \subset \mathbb{R}^n$ um intervalo compacto e $f : I \times]a,b[\to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\partial_{n+1} f$ existe e é contínua. Então a função $F :]a,b[\to \mathbb{R}$ definida por
    $$F(t) = \int_I f(\mathbf{x}, t) dV_n(\mathbf{x})$$
    é de classe C^1 e
    $$F'(t) = \int_I \partial_{n+1} f(\mathbf{x}, t) dV_n(\mathbf{x}).$$

5. Formas Diferenciais

1. O *dual* de $\mathbb{R}^n$ é
   $$(\mathbb{R}^n)^* = \{\omega : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \omega \text{ é linear}\}.$$
   Os elementos de $(\mathbb{R}^n)^*$ dizem-se *covectores-1*.
2. $(\mathbb{R}^n)^*$ é um espaço vectorial de dimensão n. Uma base para $(\mathbb{R}^n)^*$ é
   $$\{dx^1, \ldots, dx^n\}$$
   onde o covector-1 dx^i é definido por
   $$dx^i \left(v^1 \mathbf{e}_1 + \ldots + v^n \mathbf{e}_n\right) = v^i,$$
   ou seja,
   $$dx^i (\mathbf{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{cases}$$
   (δ_{ij} diz-se o *delta de Kronecker*.)

3. Um *tensor-k* (covariante) é uma aplicação $T : (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}$ multilinear, i.e., tal que

$$T(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i + \mathbf{w}_i, \ldots, \mathbf{v}_k) = T(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_k) + T(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{w}_i, \ldots, \mathbf{v}_k);$$
$$T(\mathbf{v}_1, \ldots, \lambda\mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_k) = \lambda T(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_k)$$

($\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$). $T^k(\mathbb{R}^n)$ designa o conjunto de todos os tensores-k em $\mathbb{R}^n$.

4. Um tensor-k $\omega \in T^k(\mathbb{R}^n)$ diz-se *alternante*, ou um *covector-k*, se

$$\omega(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{v}_k) = -\omega(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_k)$$

($\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$, $1 \le i < j \le n$). $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ designa o conjunto de todos os covectores-k em $\mathbb{R}^n$.

5. $T^k(\mathbb{R}^n)$ é um espaço vectorial e $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ é um subespaço vectorial de $T^k(\mathbb{R}^n)$.

6. Se $S \in T^k(\mathbb{R}^n)$ e $T \in T^l(\mathbb{R}^n)$, o seu *produto tensorial* $S \otimes T \in T^{k+l}(\mathbb{R}^n)$ é dado por

$$S \otimes T(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_l) = S(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)\, T(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_l)$$

($\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_l \in \mathbb{R}^n$).

7. *Propriedades do produto tensorial:* Se S, T, U são tensores e $\lambda \in \mathbb{R}$ então
   (i) $(S + T) \otimes U = S \otimes U + T \otimes U$;
   (ii) $S \otimes (T + U) = S \otimes T + S \otimes U$;
   (iii) $(\lambda S) \otimes T = \lambda(S \otimes T) = S \otimes (\lambda T)$;
   (iv) $S \otimes (T \otimes U) = (S \otimes T) \otimes U$;
   (v) $S \otimes T \neq T \otimes S$ (em geral).

8. $\dim\left(T({}^k(\mathbb{R}^n)\right) = n^k$, e uma base é $\left\{dx^{i_1} \otimes \ldots \otimes dx^{i_k}\right\}_{i_1, \ldots, i_k = 1}^n$.

9. Se $T \in T^k(R^n)$, define-se

$$\mathrm{Alt}(T)(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}(\sigma) T\left(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathbf{v}_{\sigma(k)}\right)$$

10. *Propriedades de* Alt*:*
   (i) Se $T \in T^k(R^n)$ então $\mathrm{Alt}(T) \in \Lambda^k(R^n)$;
   (ii) $\mathrm{Alt} : T^k(R^n) \to \Lambda^k(R^n)$ é linear;
   (iii) Se $\omega \in \Lambda^k(R^n)$ então $\mathrm{Alt}(\omega) = \omega$.

   (Por outras palavras, $\mathrm{Alt} : T^k(R^n) \to \Lambda^k(R^n)$ é uma projecção).

11. Se ω é um covector-k e η é um covector-l, o seu *produto exterior* é o covector-$(k + l)$

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k + l)!}{k!\ l!} \mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta).$$

12. *Propriedades do produto exterior:*
   (i) $\omega \wedge (\alpha + \beta) = \omega \wedge \alpha + \omega \wedge \beta$;
   (ii) $\omega \wedge (c\eta) = c(\omega \wedge \eta)$ com $c \in \mathbb{R}$;
   (iii) $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$ para $\omega \in \Lambda^k(R^n)$,$\eta \in \Lambda^l(R^n)$;
   (iv) $\omega \wedge (\alpha \wedge \beta) = (\omega \wedge \alpha) \wedge \beta$.

13. $dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = \det \begin{bmatrix} dx^{i_1}(\mathbf{v}_1) & \ldots & dx^{i_1}(\mathbf{v}_k) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ dx^{i_k}(\mathbf{v}_1) & \ldots & dx^{i_k}(\mathbf{v}_k) \end{bmatrix}$.
14. $\dim \Lambda^k(R^n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, e uma base é $\left\{dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}\right\}_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n}$.
15. Uma *forma diferencial* de grau k e classe C^q no aberto $U \subset R^n$ é uma função $\omega : U \to \Lambda^k(R^n)$ de classe C^q (i.e., $\omega(\mathbf{x}) \in \Lambda^k(R^n)$ para todo o $\mathbf{x} \in U$). O conjunto das formas-k de classe C^∞ em $U \subset R^n$ designa-se por $\Omega^k(U)$.
16. Se $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m$ são abertos, $\mathbf{f} : U \to V$ é C^∞ e $\omega \in \Omega^k(V)$ então o *pull-back* de ω por $\mathbf{f}$ é a forma-k $\mathbf{f}^*\omega \in \Omega^k(U)$ definida por

$$\mathbf{f}^*\omega(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = \omega(\mathbf{f}(\mathbf{x}))(D\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{v}_1, \ldots, D\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{v}_k)$$

para $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in R^n$.
17. *Propriedades do pull-back:*
   (i) $\mathbf{f}^*(\omega + \eta) = \mathbf{f}^*\omega + \mathbf{f}^*\eta$;
   (ii) $\mathbf{f}^*(\omega \wedge \eta) = \mathbf{f}^*\omega \wedge \mathbf{f}^*\eta$;
   (iii) $\mathbf{f}^*\mathbf{g}^*\omega = (\mathbf{g} \circ \mathbf{f})^*(\omega)$.
18. Se $U \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e $\omega \in \Omega^k(U)$,

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \ldots i_k}(\mathbf{x}) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k},$$

a sua *derivada exterior* $d\omega \in \Omega^{k+1}(U)$ é dada por

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \sum_{i=1}^{n} \partial_i \, \omega_{i_1 \ldots i_k} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.$$

19. *Propriedades da derivada exterior:*
   (i) $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$;
   (ii) $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$, onde $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$;
   (iii) $d(d\omega) = 0$ (abreviadamente, $d^2 = 0$);
   (iv) $d(\mathbf{f}^*\omega) = \mathbf{f}^*(d\omega)$.
20. Por definição, $\Lambda^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$, e portanto as formas-0 num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ são as funções $g : U \to \mathbb{R}$ de classe C^∞. Se $g \in \Omega^0(U)$, $\omega \in \Omega^k(U)$ e $\mathbf{f} : V \subset \mathbb{R}^m \to U$ é de classe C^∞,
   (i) $g \wedge \omega = g\omega$;
   (ii) $\mathbf{f}^*g = g \circ \mathbf{f}$;
   (iii) $dg = \dfrac{\partial g}{\partial x^1} dx^1 + \ldots + \dfrac{\partial g}{\partial x^n} dx^n$.

   (em particular, $d(x^i) = dx^i$, o que justifica esta notação).
21. Se $U \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, $\omega \in \Omega^k(U)$ diz-se *fechada* se $d\omega = 0$, e *exacta* se existe uma forma $\alpha \in \Omega^{k-1}(U)$ tal que $\omega = d\alpha$ (α diz-se então um *potencial* para ω).
22. ω exacta $\Rightarrow$ ω fechada.

23. $A \subset \mathbb{R}^n$ diz-se *em estrela* se existe um ponto $\mathbf{x}_0 \in A$ (dito o *centro*) tal que $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}] \subset A$ para todo o $\mathbf{x} \in A$, onde

$$[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}] = \{\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) : t \in [0, 1]\}$$

designa o segmento de recta de extremos $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{x}$.

24. *Lema de Poincaré:* Seja $\omega \in \Omega^k(U)$, onde $U \subset \mathbb{R}^n$ é aberto. Se U é em estrela e ω é fechada, então ω é exacta.

6. Integrais de Formas Diferenciais

1. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade de dimensão m, $\mathbf{x} \in M$ e $U \ni \mathbf{x}$ uma vizinhança aberta; $\mathbf{g} : V \subset \mathbb{R}^m \to M \cap U$ diz-se uma *parametrização* de classe C^q de $M \cap U$ se é uma bijecção de classe C^q com $\mathbf{g}^{-1} : M \cap U \to V$ contínua e $\operatorname{rank} D\mathbf{g}(\mathbf{t}) = m$ para todo o $\mathbf{t} \in V$.
2. $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade de dimensão m e classe C^q *sse* para todo o $\mathbf{x} \in M$ existe uma vizinhança aberta $U \ni \mathbf{x}$ e uma parametrização $\mathbf{g} : V \subset \mathbb{R}^m \to M \cap U$ de classe C^q. Além disso, as colunas de $D\mathbf{g}(\mathbf{t})$ formam uma base para $T_{\mathbf{g}(\mathbf{t})}M$.
3. Se $\mathbf{g} : V \subset \mathbb{R}^m \to M \cap U$ é uma parametrização, a função contínua $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{g}^{-1} : M \cap U \to V$ diz-se uma *carta local*, e o seu domínio $M \cap U$ a respectiva *vizinhança de coordenadas*.
4. Sejam $\mathbf{g} : V \subset \mathbb{R}^m \to M \cap U$ e $\mathbf{h} : W \subset \mathbb{R}^m \to M \cap O$ duas parametrizações tais que $M \cap U \cap O \neq \varnothing$, e $\boldsymbol{\varphi} : M \cap U \to V$ e $\boldsymbol{\psi} : M \cap O \to W$ as respectivas cartas locais. Então a mudança de carta local $\boldsymbol{\psi} \circ \mathbf{g} : \boldsymbol{\varphi}(M \cap U \cap O) \to \boldsymbol{\psi}(M \cap U \cap O)$ é de classe C^q e $J(\boldsymbol{\psi} \circ \mathbf{g})(\mathbf{t}) \neq 0$ para todo o $\mathbf{t} \in \boldsymbol{\varphi}(M \cap U \cap O)$.
5. Diz-se que um covector-m $\omega \in \Lambda^m(\mathbb{R}^n)$ *orienta* o subespaço $V \subset \mathbb{R}^n$ de dimensão m se existe uma base $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ para V tal que

   $$\omega(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m) \neq 0.$$

   Diz-se que a base é *positivamente orientada* se $\omega(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m) > 0$, e *negativamente orientada* se $\omega(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m) < 0$. Se ω orienta V e $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ é outra qualquer base para V então $\omega(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m) = (\det S)\omega(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m) \neq 0$, onde S é a matriz de mudança de base (portanto duas bases têm a mesma orientação *sse* o determinante da matriz de mudança de base é positivo). Diz-se que dois covectores induzem a mesma orientação se as respectivas bases positivamente orientadas coincidem (portanto existem exactamente *duas* orientações para um subespaço $V \subset \mathbb{R}^n$, induzidas por ω e $-\omega$).
6. Diz-se que uma variedade-m $M \subset \mathbb{R}^n$ é *orientável* se existe uma forma-m $\mu \in \Omega^m(\mathbb{R}^n)$ que orienta todos os espaços tangentes a M. Diz-se que uma parametrização $\mathbf{g} : V \subset \mathbb{R}^m \to M \cap U$ é *compatível* com μ se a base $\{\partial_1 \mathbf{g}, \ldots, \partial_m \mathbf{g}\}$ para $T_{\mathbf{g}(\mathbf{t})}M$ é positivamente orientada para todo o $\mathbf{t} \in V$.
7. Uma variedade-m $M \subset \mathbb{R}^n$ é orientável *sse* existe $\mu \in \Omega^m(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mathbf{g}^*\mu(\mathbf{t}) \neq 0$ para todo o $\mathbf{t} \in V$ e toda a parametrização $\mathbf{g} : V \subset \mathbb{R}^m \to M \cap U$. Uma parametrização $\mathbf{g}$ é compatível com a orientação induzida por μ *sse* $\mathbf{g}^*\mu = f dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^m$ com $f > 0$.
8. Uma variedade diferenciável $M \subset \mathbb{R}^n$ conexa é conexa por arcos.
9. Uma variedade diferenciável $M \subset \mathbb{R}^n$ conexa e orientável admite exactamente *duas* orientações (induzidas por μ e $-\mu$).

10. A imagem de qualquer parametrização é orientável: se $\mathbf{g} : V \subset \mathbb{R}^m \to M \cap U$ é uma parametrização,

$$\mathbf{g}^* \left(\omega_{\partial_1 \mathbf{g}} \wedge \ldots \wedge \omega_{\partial_m \mathbf{g}}\right) = \det\left(g_{ij}\right) dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^m,$$

onde

$$g_{ij} = \partial_i \mathbf{g} \cdot \partial_j \mathbf{g}.$$

11. Dado um vector

$$\mathbf{v} = v^1 \mathbf{e}_1 + \ldots + v^n \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$$

definimos o covector-1

$$\omega_{\mathbf{v}} = v^1 dx^1 + \ldots + v^n dx^n$$

e o covector-$(n-1)$

$$\Omega_{\mathbf{v}} = v^1 dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n - \ldots + (-1)^{n-1} v^n dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{n-1}.$$

12. (i) Qualquer variedade-1 $M \subset \mathbb{R}^n$ é orientável: se $\mathbf{t} : M \to \mathbb{R}^n$ é um vector tangente unitário contínuo, $\omega_{\mathbf{t}}$ induz uma orientação em M. Uma parametrização $\mathbf{g}$ é compatível com esta orientação *sse*

$$\mathbf{t} \cdot \frac{d\mathbf{g}}{dt} > 0.$$

(ii) Uma variedade-$(n-1)$ $M \subset \mathbb{R}^n$ é orientável *sse* possui um vector normal unitário contínuo $\mathbf{n} : M \to \mathbb{R}^n$, caso em que $\Omega_{\mathbf{n}}$ induz uma orientação em M. Uma parametrização $\mathbf{g}$ é compatível com esta orientação *sse*

$$\mathbf{n} \cdot (\partial_1 \mathbf{g} \times \ldots \times \partial_{n-1} \mathbf{g}) > 0.$$

13. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade-m orientável com a orientação induzida por $\mu \in \Omega^m(\mathbb{R}^n)$, e seja $\omega \in \Omega^m(\mathbb{R}^n)$. Seja $\mathbf{g} : V \subset \mathbb{R}^m \to M \cap U$ uma parametrização, e $f, h : V \to \mathbb{R}$ tais que $\mathbf{g}^* \omega = f dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^m$, $\mathbf{g}^* \mu = h dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^m$. Se f é integrável em V, define-se

$$\int_{M \cap U^\mu} \omega = \operatorname{sgn}(h) \int_V f(\mathbf{t}) dV_m(\mathbf{t}).$$

Definimos ainda

$$\int_{M \cap U} |\omega| = \int_V |f(\mathbf{t})| dV_m(\mathbf{t}).$$

Se $\mathcal{O}$ é uma cobertura aberta de M tal que $M \cap U$ é uma vizinhança de coordenadas para todo o $U \in \mathcal{O}$ e Φ é uma partição da unidade subordinada a $\mathcal{O}$, e se a série

$$\sum_{\varphi \in \Phi} \int_{M \cap U_\varphi} |\varphi \omega|$$

converge (onde U_φ designa uma aberto tal que $\operatorname{supp} \varphi \subset U_\varphi$), definimos

$$\int_{M^\mu} \omega = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_{M \cap U_\varphi{}^\mu} \varphi \omega.$$

14. Se $U \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e $f : U \to \mathbb{R}$ é integrável, então

$$\int_{U^+} f dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = \int_U f dV_n$$

onde $+$ é a orientação induzida em U por $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$. Por essa razão, $dV_n = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ diz-se o *elemento de volume* em $\mathbb{R}^n$. Se $\mathbf{g} : V \subset \mathbb{R}^m \to M \cap U$ é uma parametrização compatível com a orientação induzida em $M \cap U$ por $\mu \in \Omega^m(\mathbb{R}^n)$, então

$$\int_{M \cap U^\mu} \omega = \int_{V^+} \mathbf{g}^* \omega.$$

15. $dV_m \in \Omega^m(\mathbb{R}^n$ diz-se um *elemento de volume* para a variedade-m $M \subset \mathbb{R}^n$ se

$$|dV_m(\mathbf{x}) (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m)| = V_m (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m) = \det (g_{ij})$$

para quaisquer $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in T_\mathbf{x} M$ e $\mathbf{x} \in M$, onde g é a matriz $m \times m$ dada por $g_{ij} = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$.

16. Qualquer variedade-m orientável $M \subset \mathbb{R}^n$ possui um elemento de volume $dV_m \in \Omega^m(\mathbb{R}^n)$, e este induz uma orientação em M. Se $\mathbf{g} : V \subset \mathbb{R}^m \to M \cap U$ é uma parametrização compatível com a orientação induzida por dV_m, então

$$\mathbf{g}^* dV_m = \sqrt{\det (g_{ij})}\; dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^m = \sqrt{\det (D\mathbf{g}^t D\mathbf{g})}\; dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^m$$

onde a matriz $m \times m$ g é dada por

$$g_{ij} = \partial_i \mathbf{g} \cdot \partial_j \mathbf{g}.$$

17. (i) Se M é uma variedade-1 e $\mathbf{g}$ é uma parametrização compatível com o elemento de volume dV_1, então

$$\mathbf{g}^* dV_1 = \left\| \frac{d\mathbf{g}}{dt} \right\| dt.$$

(ii) Se M é uma variedade-$(n-1)$ orientável e $\mathbf{g}$ é uma parametrização compatível com o elemento de volume dV_{n-1}, então

$$\mathbf{g}^* dV_{n-1} = \| \partial_1 \mathbf{g} \times \ldots \times \partial_{n-1} \mathbf{g} \| \, dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^{n-1}.$$

18. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é um campo escalar e $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade-m orientável, define-se

$$\int_M f = \int_{M^+} f dV_m,$$

onde $+$ é a orientação induzida em M por dV_m.

19. Se $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade de dimensão m orientável e é dada uma *função densidade de massa por unidade de volume m-dimensional* $\sigma : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty[$, define-se:

i. O *volume* m-dimensional de M:

$$V = V_m(M) = \int_M dV_m.$$

ii. A *massa* de M:

$$M = \int_M \sigma dV_m.$$

iii. A coordenada k do *centro de massa* de M:

$$x_{CM}^k = \frac{1}{M} \int_M x^k \sigma dV_m.$$

iv. A coordenada k do *centróide* de M:

$$x_C^k = \frac{1}{V} \int_M x^k dV_m.$$

v. O *momento de inércia* de A em relação ao eixo $\mathbb{R}\mathbf{e}_k$:

$$I_k = \int_M \sum_{i \neq k} (x^i)^2 \sigma dV_m.$$

20. Se $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade-1, $\mathbf{g} :]a, b[\to \mathbb{R}^n$ uma parametrização e $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um campo vectorial,

$$\int_{M^+} \omega_{\mathbf{F}} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{g}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{g}}{dt}(t) dt = \int_M \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dV_1,$$

onde $+$ é a orientação de M compatível com $\mathbf{g}$ e

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \frac{\frac{d\mathbf{g}}{dt}(t)}{\left\| \frac{d\mathbf{g}}{dt}(t) \right\|}$$

é o vector tangente unitário correspondente a esta orientação. Este integral diz-se o *integral de linha* de $\mathbf{F}$ ao longo de M na direcção determinada por $\boldsymbol{\tau}$; no caso em que $\mathbf{F}$ é uma força, tem a interpretação física do trabalho realizado por $\mathbf{F}$ sobre uma partícula que percorre M nesta direcção.

21. Se $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade-$(n-1)$ (*hipersuperfície*) orientável, $\mathbf{g} : V \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ uma parametrização e $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um campo vectorial,

$$\int_{M^+} \Omega_{\mathbf{F}} = \int_V \mathbf{F} \cdot (\partial_1 \mathbf{g} \times \ldots \times \partial_{n-1} \mathbf{g}) \, dt^1 \ldots dt^{n-1} = \int_M \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dV_{n-1},$$

onde $+$ é a orientação de M compatível com $\mathbf{g}$ e

$$\mathbf{n} = \frac{\partial_1 \mathbf{g} \times \ldots \times \partial_{n-1} \mathbf{g}}{\|\partial_1 \mathbf{g} \times \ldots \times \partial_{n-1} \mathbf{g}\|}$$

é o vector normal unitário correspondente a esta orientação. Este integral diz-se o *fluxo* de $\mathbf{F}$ através de M na direcção determinada por $\mathbf{n}$; no caso em que $\mathbf{F} = \rho \mathbf{v}$, onde ρ e $\mathbf{v}$ são a densidade e velocidade de um fluido, tem a interpretação física da massa de fluido que atravessa M por unidade de tempo nesta direcção.

22. $M \subset \mathbb{R}^n$ diz-se uma *variedade com bordo* de dimensão m (e classe C^q) se $M = \dot{M} \cup \partial M$, onde $\dot{M}$ é uma variedade de dimensão m (e classe C^q), ∂M é uma variedade de dimensão $m-1$ (e classe C^q), dita o *bordo* de M, e para todo o $\mathbf{x} \in \partial M$ existe um aberto $U \ni \mathbf{x}$ e uma aplicação de classe C^q injectiva e com inversa contínua $\mathbf{g} : V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ cuja restrição a $V \cap \{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^m : t^1 < 0\}$ é uma parametrização de $\dot{M} \cap U$ e cuja restrição a $V \cap \{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^m : t^1 = 0\}$ é uma parametrização de $\partial M \cap U$. M diz-se *orientável* se $\dot{M}$ é orientável, e se $\omega \in \Omega^m(\mathbb{R}^n)$ define-se

$$\int_{M^\mu} \omega = \int_{\dot{M}^\mu} \omega$$

(para uma dada orientação determinada por $\mu \in \Omega^m(\mathbb{R}^n)$). Se M é orientável, ∂M é sempre orientável: se $\mathbf{g} : V \cap \{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^m : t^1 \leq 0\} \to M \cap U$ é compatível com μ, $\mathbf{h} : W \subset \mathbb{R}^{m-1} \to \partial M \cap U$ dada por $\mathbf{h}(u^1, \ldots, u^{m-1}) = \mathbf{g}(0, u^1, \ldots, u^{m-1})$ é compatível com a *orientação induzida* por μ em ∂M.

23. *Teorema de Stokes (Teorema Fundamental do Cálculo):* Se $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade com bordo compacta orientável de dimensão m e $\omega \in \Omega^{m-1}(\mathbb{R}^n)$ então

$$\int_{M^\mu} d\omega = \oint_{\partial M^\nu} \omega,$$

onde ν é a orientação induzida em ∂M pela orientação μ de M.

24. Se M é uma variedade (sem bordo) compacta orientável de dimensão m e $\omega \in \Omega^{m-1}(\mathbb{R}^n)$ então

$$\oint_M d\omega = 0$$

($\oint$ significa apenas que a região de integração é uma variedade compacta).

25. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é um campo escalar de classe C^1, tem-se

$$df = \omega_{\nabla f}.$$

26. *Notação:* Se $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um campo vectorial e M é uma variedade de dimensão 1 com parametrização $\mathbf{g} :]a, b[\to \mathbb{R}^n$ (compatível com a orientação $+$ de M), é habitual escrever

$$\int_M \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g} = \int_{M^+} \omega_{\mathbf{F}} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{g}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{g}}{dt}(t) dt.$$

27. *Teorema Fundamental do Cálculo para Integrais de Linha:* Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é um campo escalar de classe C^1 e M é uma variedade de dimensão 1 com bordo parametrizada por $\mathbf{g} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, com $\mathbf{g}(a) = \mathbf{a}$ e $\mathbf{g}(b) = \mathbf{b}$, então

$$\int_M \nabla f \cdot d\mathbf{g} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}).$$

28. Se $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um campo vectorial de classe C^1, a sua *divergência* é o campo escalar contínuo

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F^1}{\partial x^1} + \ldots + \frac{\partial F^n}{\partial x^n}.$$

Tem-se

$$d\Omega_{\mathbf{F}} = (\nabla \cdot \mathbf{F}) dV_n.$$

29. *Teorema da Divergência:* Se $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um campo vectorial de classe C^1 e M é uma variedade com bordo de dimensão n então

$$\int_M \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV_n = \oint_{\partial M} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dV_{n-1},$$

onde $\mathbf{n}$ é a normal unitária *exterior*.

30. *Teorema de Green:* É apenas o Teorema de Stokes para variedades-2 com bordo $M \subset \mathbb{R}^2$:

$$\int_{\partial M^\nu} Pdx + Qdy = \int_M \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy,$$

onde ν corresponde a percorrer ∂M mantendo M à esquerda do vector tangente.

7. Cálculo Vectorial em $\mathbb{R}^3$

1. Se $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é um campo vectorial de classe C^1, o seu *rotacional* é o campo vectorial

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F^1 & F^2 & F^3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F^3}{\partial y} - \frac{\partial F^2}{\partial z}, \frac{\partial F^1}{\partial z} - \frac{\partial F^3}{\partial x}, \frac{\partial F^2}{\partial x} - \frac{\partial F^1}{\partial y} \right).$$

2. *Teorema de Stokes para Campos Vectoriais:* Se $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é um campo vectorial de classe C^1 e M é uma superfície com bordo, então

$$\int_M (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = \oint_{\partial M} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dg},$$

onde ∂M deve ser percorrido no sentido tal que o produto externo do vector tangente ao bordo pela normal unitária $\mathbf{n}$ aponte *para fora* da superfície.

3. *Regra da Mão Direita:* Uma maneira simples de recordar a relação entre as orientações da superfície e do seu bordo no Teorema de Stokes é a seguinte: desenhando um pequeno quadrado na superfície tal que um dos seus lados é um pedaço do bordo, a orientação correcta do bordo é a que induz a circulação ao longo dos lados do quadrado que fornece a normal unitária $\mathbf{n}$ por aplicação da regra da mão direita (fechando a mão direita no sentido da circulação no quadrado, o polegar aponta na direcção da normal).

4. Se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é um campo escalar de classe C^2, então

$$\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}.$$

5. Se $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é um campo vectorial de classe C^2, então

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0.$$

6. *Lema de Poincaré para Campos Vectoriais:* Se $\mathbf{F} : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é um campo vectorial de classe C^1 e U é um conjunto em estrela então:

   (i) $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{F} = \nabla f$ para algum campo escalar $f : U \to \mathbb{R}$ (dito um *potencial escalar* para $\mathbf{F}$);

(ii) $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \Rightarrow \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A}$ para algum campo vectorial $\mathbf{A} : U \to \mathbb{R}^3$ (dito um *potencial vector* para $\mathbf{F}$).

7. *Dicionário Formas/Campos em* $\mathbb{R}^3$:

(i) Produtos:

$$\begin{aligned}
&\omega_{f\mathbf{F}} = f\omega_{\mathbf{F}};\\
&\Omega_{\mathbf{F}\times\mathbf{G}} = \omega_{\mathbf{F}} \wedge \omega_{\mathbf{G}};\\
&(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})dV_3 = \Omega_{\mathbf{F}} \wedge \omega_{\mathbf{G}} = \omega_{\mathbf{F}} \wedge \Omega_{\mathbf{G}}.
\end{aligned}$$

(ii) Derivadas:

$$\begin{aligned}
&\omega_{\nabla f} = df;\\
&\Omega_{\nabla\times\mathbf{F}} = d\omega_{\mathbf{F}};\\
&(\nabla \cdot \mathbf{F})dV_3 = d\Omega_{\mathbf{F}}.
\end{aligned}$$

(iii) Integrais:

$$\begin{aligned}
&\int_M \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g} = \int_M \omega_{\mathbf{F}};\\
&\int_M \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = \int_M \Omega_{\mathbf{F}};
\end{aligned}$$

(iv) Teoremas Sobre Derivadas de Produtos:

$$\begin{aligned}
&\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f \Leftrightarrow d(fg) = fdg + gdf;\\
&\nabla \times (f\mathbf{F}) = (\nabla f) \times \mathbf{F} + f(\nabla \times \mathbf{F}) \Leftrightarrow d(f\omega_{\mathbf{F}}) = df \wedge \omega_{\mathbf{F}} + fd\omega_{\mathbf{F}};\\
&\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G}) \Leftrightarrow d(\omega_{\mathbf{F}} \wedge \omega_{\mathbf{G}}) = d\omega_{\mathbf{F}} \wedge \omega_{\mathbf{G}} - \omega_{\mathbf{F}} \wedge d\omega_{\mathbf{G}}.
\end{aligned}$$

(v) Teoremas Sobre Derivadas:

$$\begin{aligned}
&\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0} \Leftrightarrow d(df) = 0;\\
&\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0 \Leftrightarrow d(d\omega_{\mathbf{F}}) = 0.
\end{aligned}$$

(vi) Teoremas Sobre Integrais:

$$\begin{aligned}
&\int_M (\nabla f) \cdot d\mathbf{g} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) \Leftrightarrow \int_M df = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a});\\
&\iint_M (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = \oint_{\partial M} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dg} \Leftrightarrow \int_M d\omega_{\mathbf{F}} = \oint_{\partial M} \omega_{\mathbf{F}};\\
&\iiint_M (\nabla \cdot \mathbf{F})\, dV_3 = \oiint_{\partial M} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dV_2 \Leftrightarrow \int_M d\Omega_{\mathbf{F}} = \oint_{\partial M} \Omega_{\mathbf{F}}.
\end{aligned}$$

8. Se $U, V \subset \mathbb{R}^n$ são abertos e $\mathbf{g} : V \to U$ é uma mudança de coordenadas,

$$(x^1, \dots, x^n) = \mathbf{g}(t^1, \dots, t^n) \Leftrightarrow (t^1, \dots, t^n) = \mathbf{g}^{-1}(x^1, \dots, x^n),$$

vê-se que $(t^1, \dots, t^n)$ podem ser vistas como funções definidas em U. Tem-se

(i) $\{\partial_1\mathbf{g}, \dots, \partial_n\mathbf{g}\}$ é uma base para $\mathbb{R}^n$;

(ii) $dt^i\left(\partial_j \mathbf{g}\right)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 \text{ se } i=j \\ 0 \text{ se } i\neq j\end{cases}$;

(iii) $\left\{dt^1,\ldots,dt^n\right\}$ é uma base para $(\mathbb{R}^n)^*$, dita a *base dual* de $\{\partial_1\mathbf{g},\ldots,\partial_n\mathbf{g}\}$;

(iv) $\omega_{\partial_i\mathbf{g}}=\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\,dt^j$, onde $g_{ij}=\partial_i\mathbf{g}\cdot\partial_j\mathbf{g}$.

9. *Coordenadas Cilíndricas em* $\mathbb{R}^3$: Tem-se

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & r^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

e portanto $\{\partial_r\mathbf{g},\partial_\theta\mathbf{g},\partial_z\mathbf{g}\}$ é uma base ortogonal correspondendo às formas $\left\{dr, r^2d\theta, dz\right\}$. A respectiva base ortonormal satisfaz

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_r &= \partial_r\mathbf{g}\sim dr\sim \mathbf{e}_\theta\times\mathbf{e}_z\sim rd\theta\wedge dz;\\
\mathbf{e}_\theta &= \frac{1}{r}\partial_\theta\mathbf{g}\sim rd\theta\sim \mathbf{e}_z\times\mathbf{e}_r\sim dz\wedge dr;\\
\mathbf{e}_z &= \partial_z\mathbf{g}\sim dz\sim \mathbf{e}_r\times\mathbf{e}_\theta\sim rdr\wedge d\theta
\end{aligned}$$

(onde escrevemos $\mathbf{F}\sim\omega_{\mathbf{F}}\sim\Omega_{\mathbf{F}}$). Tem-se ainda

$$dV_3=rdr\wedge d\theta\wedge dz.$$

10. *Coordenadas Esféricas em* $\mathbb{R}^3$: Tem-se

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & r^2 & 0\\ 0 & 0 & r^2\operatorname{sen}^2\theta\end{pmatrix}$$

e portanto $\{\partial_r\mathbf{g},\partial_\theta\mathbf{g},\partial_\varphi\mathbf{g}\}$ é uma base ortogonal correspondendo às formas $\left\{dr, r^2d\theta, r^2\operatorname{sen}^2\theta d\varphi\right\}$. A respectiva base ortonormal satisfaz

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_r &= \partial_r\mathbf{g}\sim dr\sim \mathbf{e}_\theta\times\mathbf{e}_\varphi\sim r^2\operatorname{sen}\theta d\theta\wedge d\varphi;\\
\mathbf{e}_\theta &= \frac{1}{r}\partial_\theta\mathbf{g}\sim rd\theta\sim \mathbf{e}_\varphi\times\mathbf{e}_r\sim r\operatorname{sen}\theta d\varphi\wedge dr;\\
\mathbf{e}_\varphi &= \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\partial_\varphi\mathbf{g}\sim r\operatorname{sen}\theta d\varphi\sim \mathbf{e}_r\times\mathbf{e}_\theta\sim rdr\wedge d\theta.
\end{aligned}$$

Tem-se ainda

$$dV_3=r^2\operatorname{sen}\theta dr\wedge d\theta\wedge d\varphi.$$

8. Homotopia

1. Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um aberto; $\omega \in \Omega^m(D)$ é exacta *sse*

$$\oint_M \omega = 0$$

para toda a variedade-m compacta $M \subset D$.

2. Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um aberto tal que toda a variedade-m compacta $M \subset D$ é o bordo de uma variedade-$(m+1)$ com bordo compacta $N \subset D$. Então $\omega \in \Omega^m(D)$ é exacta *sse* ω é fechada.

3. Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto não vazio. Diz-se que dois caminhos fechados $\mathbf{g}, \mathbf{h} : [a, b] \to D$ são *caminhos homotópicos* em D se existe uma função contínua $\mathbf{H} : [a, b] \times [0, 1] \to D$ (dita uma *homotopia*) tal que $\mathbf{H}(s, 0) = \mathbf{g}(s)$ e $\mathbf{H}(s, 1) = \mathbf{h}(s)$ para todo o $s \in [a, b]$ e $\mathbf{H}(a, t) = \mathbf{H}(b, t)$ para todo o $t \in [0, 1]$.

4. Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $M, N \subset D$ duas variedades-1 compactas com parametrizações homotópicas em D, e $\omega \in \Omega^1(D)$ uma forma fechada. Então

$$\oint_M \omega = \oint_N \omega.$$

5. Diz-se que $D \subset \mathbb{R}^n$ é *simplesmente conexo* se D é conexo por arcos e qualquer caminho fechado $\mathbf{g} : [a, b] \to D$ é homotópico em D a um caminho constante.

6. Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um aberto simplesmente conexo e $\omega \in \Omega^1(D)$. Então ω é exacta *sse* ω é fechada.

9. Integral de Lebesgue

1. Uma álgebra de conjuntos $\mathcal{A}$ em $X \subset \mathbb{R}^n$ diz-se uma *σ-álgebra* se

$$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathcal{A}.$$

2. A *medida exterior* de $A \subset \mathbb{R}^n$ é

$$\overline{V}_n(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} V_n(I_k) : I_k \text{ intervalo, } A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k \right\}$$

(pode ser $+\infty$). Note-se que $\overline{V}_n(A) = 0$ *sse* A tem medida nula.

3. A *diferença simétrica* entre dois conjuntos A e B é

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

4. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ diz-se *mensurável à Lebesgue com medida finita* se para todo o $\varepsilon > 0$ existem intervalos limitados $I_1, \ldots, I_N$ tais que

$$\overline{V}_n \left(A \triangle \bigcup_{k=1}^{N} I_k \right) < \varepsilon.$$

Diz-se que $A \subset \mathbb{R}^n$ é *mensurável à Lebesgue* se $A \cap [-L, L]^n$ é mensurável à Lebesgue com medida finita para todo o $L > 0$. A família dos subconjuntos mensuráveis de $\mathbb{R}^n$ designa-se por $\mathcal{M}$. A função $V_n : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ definida por $V_n(A) = \overline{V}_n(A)$ diz-se a *medida de Lebesgue*.

5. (i) $\mathcal{M}$ é uma σ-álgebra;

   (ii) $V_n : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ é σ-*aditiva*, i.e., se $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}$ e $A_i \cap A_j = \varnothing$ para $i \neq j$ então
   $$V_n(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} V_n(A_k);$$

   (iii) A tem medida nula $\Rightarrow A \in \mathcal{M}$;

   (iv) A aberto $\Rightarrow A \in \mathcal{M}$ (logo A fechado $\Rightarrow A \in \mathcal{M}$).

6. Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diz-se *mensurável* se $f^{-1}(I) \in \mathcal{M}$ para qualquer intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

7. (i) f contínua $\Rightarrow f$ mensurável;

   (ii) f, g mensuráveis e $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ contínua $\Rightarrow F \circ (f, g)$ mensurável (e.g., $f + g, fg$);

   (iii) $f_1, f_2, \ldots$ mensuráveis tais que existe $f(\mathbf{x}) = \lim_{k \to +\infty} f_k(\mathbf{x}) \Rightarrow f$ mensurável.

8. A função $s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diz-se *simples* se existem conjuntos disjuntos $A_1, \ldots, A_n \subset \mathbb{R}^n$ e números reais $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ tais que
   $$s = \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{A_i}.$$
   Se $c_i \neq c_j$ para $i \neq j$, a função s é mensurável *sse* $A_1, \ldots, A_N \in \mathcal{M}$.

9. Se $s : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty[$ é simples e mensurável,
   $$s = \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{A_i} \qquad (c_i \in \mathbb{R}^+, A_i \in \mathcal{M}),$$
   define-se o seu *integral* como sendo
   $$\int_{\mathbb{R}^n} s dV_n = \sum_{i=1}^{N} c_i V_n(A_i)$$
   (pode ser $+\infty$).

10. Se $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty[$ é mensurável, define-se
    $$\int_{\mathbb{R}^n} f dV_n = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} s dV_n : 0 \leq s \leq f \text{ é simples e mensurável} \right\}$$
    (pode ser $+\infty$). Se
    $$\int_{\mathbb{R}^n} f dV_n < +\infty$$
    a função f diz-se *integrável* (à Lebesgue).

11. Dada uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definem-se $f^+, f^- : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ através de

$$f^+(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{se} \quad f(\mathbf{x}) \geq 0 \\ 0 & \text{se} \quad f(\mathbf{x}) \leq 0 \end{cases}, \quad f^-(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad f(\mathbf{x}) \geq 0 \\ -f(\mathbf{x}) & \text{se} \quad f(\mathbf{x}) \leq 0 \end{cases}$$

Tem-se $f^+, f^- \geq 0, f = f^+ - f^-, |f| = f^+ + f^-$, e f é mensurável *sse* f^+, f^- são mensuráveis.

12. Uma função mensurável $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diz-se *integrável* se f^+, f^- são integráveis. Nesse caso, define-se

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dV_n = \int_{\mathbb{R}^n} f^+ dV_n - \int_{\mathbb{R}^n} f^- dV_n.$$

13. Se $A \in \mathcal{M}$, f diz-se *integrável em* A se $f\chi_A$ é integrável, caso em que se define

$$\int_A f dV_n = \int_{\mathbb{R}^n} f\chi_A dV_n.$$

O conjunto das funções integráveis em A designa-se por $L^1(A)$.

14. Seja $A \in \mathcal{M}$. Então
    (i) Se $f : A \to \mathbb{R}$ é mensurável e limitada e $V_n(A) < +\infty$ então $f \in L^1(A)$;
    (ii) Se $f, g \in L^1(A)$ e $f \leq g$ então

    $$\int_A f dV_n \leq \int_A g dV_n.$$

    (iii) Se $V_n(A) = 0$ então $\int_A f dV_n = 0$.
    (iv) Se $a, b \in \mathbb{R}$ e f, g $L^1(A)$ então $af + bg \in L^1(A)$ e

    $$\int_A (af + bg) dV_n = a \int_A f dV_n + b \int_A g dV_n.$$

    (v) $f \in L^1(A)$ *sse* $|f| \in L^1(A)$, e

    $$\left| \int_A f dV_n \right| \leq \int_A |f| dV_n.$$

15. Seja I um intervalo compacto. Se $f : I \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é integrável à Riemann então $f \in L^1(I)$ e

$$\int_I f dV_n$$

é igual para ambas as definições.

16. *σ-aditividade do integral:* Sejam $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}$ com $A_i \cap A_j = \varnothing$ se $i \neq j$, $A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$ e $f \geq 0$ mensurável. Então

$$\int_A f dV_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{A_k} f dV_n$$

(pode ser $+\infty$).

17. Sejam $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}$ com $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, $A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$ e $f \geq 0$ mensurável. Então

$$\int_A f dV_n = \lim_{k \to +\infty} \int_{A_k} f dV_n$$

(pode ser $+\infty$).

18. $\dfrac{1}{x^\alpha} \in L^1([1, +\infty[)$ *sse* $\alpha > 1$.

19. $\dfrac{1}{x^\alpha} \in L^1(]0, 1])$ *sse* $\alpha < 1$.

20. $e^{-x^2} \in L^1(\mathbb{R})$ e $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

21. *Teorema da Convergência Monótona de Levi:* Seja $A \in \mathcal{M}$ e $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de funções mensuráveis em A tais que

$$0 \leq f_1(\mathbf{x}) \leq f_2(\mathbf{x}) \leq \ldots$$

para todo o $\mathbf{x} \in A$. Se existe $f : A \to \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{k \to +\infty} f_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$$

para todo o $\mathbf{x} \in A$ então

$$\int_A f dV_n = \lim_{k \to +\infty} \int_A f_k dV_n$$

(pode ser $+\infty$).

22. *Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue:* Seja $A \in \mathcal{M}$ e $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de funções mensuráveis em A. Se existe $f : A \to \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{k \to +\infty} f_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$$

para todo o $\mathbf{x} \in A$ existe $g \in L^1(A)$ tal que

$$|f_k(\mathbf{x})| \leq g(\mathbf{x})$$

para todo o $\mathbf{x} \in A$ e $k \in \mathbb{N}$ então $f \in L^1(A)$ e

$$\int_A f dV_n = \lim_{k \to +\infty} \int_A f_k dV_n.$$

23. *Regra de Leibniz:* Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ mensurável e $f : A \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(\mathbf{x}, y)$ é integrável em $\mathbf{x}$ para todo o $y \in \mathbb{R}$ e diferenciável em y para todo o $\mathbf{x} \in A$. Se existe $g \in L^1(A)$ tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}, y) \right| \leq g(\mathbf{x})$$

para $\mathbf{x} \in A$ e y numa vizinhança de $y_0 \in \mathbb{R}$ então a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(y) = \int_A f(\mathbf{x}, y) dV_n(\mathbf{x})$$

é diferenciável em y_0 e

$$F'(y_0) = \int_A \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}, y_0) dV_n(\mathbf{x}).$$