**Instituto Superior Técnico**
**Departamento de Matemática**
**Secção de Álgebra e Análise**

# Análise Matemática III - Turma Especial

1º exame - 6 de Janeiro de 2004 - 14h

**Duração: 3 horas.**
**Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.**

(2 val.) **1.** Determine todos os extremos locais da função $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ no conjunto

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

**2.** Recorde que é habitual definir

$$S^2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}.$$

Seja $N = (0,0,1)$. Uma *circunferência* em $S^2$ de centro em $N$ é a intersecção de $S^2$ com um plano de equação $z = z_0$ $(-1 < z_0 < 1)$. Um *meridiano* é um círculo máximo obtido intersectando $S^2$ com um plano contendo o eixo dos $zz$. Um *raio* da circunferência é a porção de um meridiano compreendida entre $N$ e um ponto da circunferência. Um *círculo* em $S^2$ de centro em $N$ é a região de $S^2$ limitada por uma circunferência de centro em $N$ que contém $N$.

(2 val.) (a) Mostre que a razão entre o perímetro de uma circunferência em $S^2$ (de centro em $N$) e o comprimento do seu raio é inferior a $2\pi$, mas converge para $2\pi$ quando o comprimento do raio tende para zero.

(2 val.) (b) Mostre que a razão entre a área de um círculo em $S^2$ (de centro em $N$) e o quadrado do comprimento do seu raio é inferior a $\pi$, mas converge para $\pi$ quando o comprimento do raio tende para zero.

(2 val.) **3.** Um campo vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ diz-se *radial* se

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f\left(\|\mathbf{x}\|^2\right)\ \mathbf{x}$$

para alguma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$. Mostre que qualquer campo radial é necessariamente um gradiente, mas nunca um rotacional (a menos que seja identicamente nulo).

(2 val.) **4.** Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma variedade-3 com bordo compacta, $\mathbf{n} : M \to \mathbb{R}^3$ a normal exterior unitária e $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vectorial de classe $C^1$ com divergência nula. Mostre que

$$\oint_{\partial M} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dV_2 = 0$$

sem usar o Teorema da Divergência.

**5.** A *função de onda* correspondente ao estado fundamental de um electrão num átomo de hidrogénio é a função $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\psi(x, y, z) = Ae^{-\frac{r}{a}},$$

onde $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ é na função distância à origem, $a \in \mathbb{R}^+$ é o chamado *raio de Bohr* e $A \in \mathbb{R}^+$ é um factor de normalização.

(2 val.) (a) Mostre que $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$, i.e., que $\psi^2 \in L^1(\mathbb{R}^3)$. Determine a constante $A \in \mathbb{R}^+$ de forma a que $\psi^2$ seja uma função densidade de probabilidade, i.e., de forma a que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \psi^2 dV_3 = 1.$$

(2 val.) (b) Determine para que valores de $n \in \mathbb{Z}$ a função $r^n \psi^2$ é integrável em $\mathbb{R}^3$, e calcule o seu integral. Obtenha em particular o *valor médio da distância do electrão à origem*, $\langle r \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} r\psi^2 dV_3$.

**6.** Recorde que o *produto cartesiano* de dois conjuntos $A$ e $B$ é o conjunto

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Recorde ainda que $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ se identifica naturalmente com $\mathbb{R}^{m+n}$.

Sejam $M \subset \mathbb{R}^m$ e $N \subset \mathbb{R}^n$ variedades diferenciáveis de dimensões $k$ e $l$ (respectivamente).

(2 val.) (a) Mostre que $M \times N \subset \mathbb{R}^{m+n}$ é uma variedade diferenciável de dimensão $k + l$, e que

$$T_{(\mathbf{x},\mathbf{y})} M \times N = \left\{(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbb{R}^{m+n} : \mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}} M \text{ e } \mathbf{w} \in T_{\mathbf{y}} N\right\}.$$

(2 val.) (b) Mostre que se $M$ e $N$ são orientáveis então $M \times N$ é orientável.

(2 val.) (c) Mostre que se $M \times N$ é orientável então $M$ e $N$ são orientáveis. Indique uma variedade diferenciável não orientável de dimensão arbitrária $n \geq 2$.