Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III - Turma Especial

2º exame - 27 de Janeiro de 2004 - 13h

Duração: 3 horas.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

(4 val.) **1.** Seja A a região do plano limitada pelas rectas de equações $x = 0$, $y = \pm h$, e pelo arco de circunferência que contém os pontos $(r, \pm h)$ e $(R, 0)$, onde $h, r, R \in \mathbb{R}^+$ satisfazem $r < R < r+h$. Seja S o sólido obtido por rotação de A em torno do eixo dos yy. Calcule o volume de S (dito o *barril* de altura $2h$, raio da base r e raio maior R). Verifique que a fórmula que obteve se reduz à fórmula do volume da esfera de raio R quando $r = 0$ e $R = h$.

2. Recorde que o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos pode ser identificado com $\mathbb{R}^2$. Portanto uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ pode ser vista como uma aplicação $(u, v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Diz-se que uma função $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de classe C^1 é *holomorfa* em D se existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h} = f'(z)$$

em cada ponto $z \in D$. À função f' chama-se a *derivada complexa* de f.

(2 val.) (a) Mostre que f é holomorfa *sse* satisfaz as *equações de Cauchy-Riemann*,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

e que nesse caso

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

(**Sugestão:** *Note que se o limite acima existe todos os limites direccionais devem coincidir; note ainda que f satisfaz as equações de Cauchy-Riemann* sse *a sua matriz Jacobiana é da forma* $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{smallmatrix}\right)$).

(2 val.) (b) Mostre que se $f'(z_0) \neq 0$ então existem vizinhanças U de z_0 e V de $f(z_0)$ tais que $f : U \to V$ é invertível com inversa holomorfa satisfazendo

$$\left(f^{-1}\right)'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}.$$

(2 val.) (c) Uma *forma-k complexa* ω em $\mathbb{R}^n$ pode ser identificada com um par de formas-k reais $\xi, \eta \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$,

$$\omega = \xi + i\eta.$$

Se M é uma variedade-k, define-se

$$\int_M \omega = \int_M \xi + i \int_M \eta.$$

Diz-se que ω é fechada se ξ e η o forem.
Em $\mathbb{R}^2$ define-se a forma-1 complexa

$$dz = dx + idy.$$

Mostre que f é holomorfa *sse* a forma-1 $f(z)dz$ (definida da forma óbvia) é fechada.

(2 val.) (d) Mostre que a função complexa $\frac{1}{z}$ é holomorfa e calcule

$$\oint_C \frac{1}{z} dz,$$

onde C é uma curva fechada qualquer que envolve a origem, percorrida uma vez no sentido directo.

(4 val.) **3.** Na vizinhança de um buraco negro, o espaço é curvo, podendo ser descrito pela variedade tridimensional

$$M = \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1 + \frac{w^2}{4} \right\}$$

(em certas unidades). Determine o volume de espaço compreendido entre o *horizonte* do buraco negro, i.e., a superfície esférica

$$S_1 = \left\{ (x, y, z, w) \in M : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$$

e uma superfície esférica exterior de raio $R > 1$,

$$S_R = \left\{ (x, y, z, w) \in M : x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \text{ e } w > 0 \right\}.$$

(4 val.) **4.** Seja $H = (h_{ij})_{i,j=1}^n$ uma matriz simétrica de funções $h_{ij} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Prove que H é a matriz Hessiana de uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^3 *sse*

$$\partial_i h_{jk} = \partial_j h_{ik}$$

para todo o $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$.