Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III - Turma Especial

1º Teste - 4 de Novembro de 2003 - 11h

Duração: 1 hora e 30 minutos.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. Considere o elipsóide

$$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\} \qquad (a,b,c>0),$$

e seja $(x_0, y_0, z_0) \in E$ com $x_0, y_0, z_0 > 0$.

(2 val.) (a) Escreva a equação do plano tangente a E no ponto (x_0, y_0, z_0).

(2 val.) (b) Determine o volume da pirâmide limitada pelo plano tangente a E no ponto (x_0, y_0, z_0) e pelos planos coordenados.

(3 val.) (c) Para que ponto (x_0, y_0, z_0) o volume desta pirâmide é mínimo? Justifique cuidadosamente a sua resposta.

2. Seja $B_r^n \subset \mathbb{R}^n$ a bola de centro em $\mathbf{0}$ e raio $r > 0$, e $B^n = B_1^n$.

(2 val.) (a) Mostre que

$$V_n(B_r^n) = r^n V_n(B^n).$$

(3 val.) (b) Mostre que

$$V_n(B^n) = \int_{B^2} \left(\int_{B^{n-2}_{\sqrt{1-u^2-v^2}}} 1 \right) du dv = \frac{2\pi}{n} V_{n-2}(B^{n-2}).$$

(2 val.) (c) Calcule $V_4(B^4)$ e $V_5(B^5)$.

3. Seja D um conjunto aberto, $\mathbf{x}_0 \in D$ e $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função diferenciável em $\mathbf{x}_0$.

(2 val.) (a) Mostre que se $\mathbf{f}$ possui inversa local numa vizinhança de $\mathbf{x}_0$ diferenciável em $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ então $m = n$.

(2 val.) (b) Mostre que se $m \geq n$, $\mathbf{f}$ é de classe C^1 e $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ possui característica máxima então existe um aberto $U \subset D$ contendo $\mathbf{x}_0$ no qual $\mathbf{f}$ é injectiva.

(2 val.) (c) Mostre que se $m \leq n$, $\mathbf{f}$ é de classe C^1 e $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ possui característica máxima então existe um aberto $U \subset D$ contendo $\mathbf{x}_0$ cuja imagem por $\mathbf{f}$ é aberta.