Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática IV - 2º Semestre 2000/2001
2º Exame - 10 de Julho de 2001 - 17 h

Duração: 3 horas
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

1. Considere a função $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$u(x,y) = e^x (y \operatorname{sen} y - x \cos y).$$

(2 val.) a) Determine uma função analítica $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $u = \operatorname{Re} f$.

(1 val.) b) Calcule

$$\oint_{\{|z|=9\}} \frac{f(z)}{z^2} dz$$

(onde a curva de integração é percorrida uma vez no sentido directo).

2. Seja

$$f(z) = \frac{1}{z(z+2)}.$$

(1 val.) a) Determine a série de Laurent da função f válida na região $0 < |z| < 2$.

(1 val.) b) Indique e classifique as singularidades de f.

(1 val.) c) Calcule todos os possíveis valores de

$$\oint_C f(z) dz,$$

onde C é uma curva simples fechada que não passa pelas singularidades de f.

(2 val.) **3.** Calcule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 - 2x + 2)^2} dx$$

utilizando o teorema dos resíduos.

(2 val.) **4.** Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} t^2 + y^2 - t + ty\dot{y} = 0 \\ y(1) = -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{cases}$$

Explicite a solução e indique o seu intervalo máximo de definição.

Volte S. F. F.

(2,5 val.) **5.** Seja

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcule e^{At} e use o resultado para resolver o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(1) = (0,1,1) \end{cases}$$

(2,5 val.) **6.** Determine a solução geral da equação

$$\dddot{y} + 2\ddot{y} + 2\dot{y} = t.$$

7. Pretende-se resolver o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - t\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = t \\ \\ u(t,1) = u(t,-1) - 2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,1) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,-1) - 2 \\ \\ u(0,x) = |x| - \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$(t \geq 0, x \in [-1,1])$.

(1 val.) a) Calcule a série de Fourier da função $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x| + x$.

(1 val.) b) Determine uma solução estacionária (i.e., independente de t) da equação diferencial que satisfaça as condições de fronteira.

(1 val.) c) Resolva o problema.

(2 val.) **8.** Use a fórmula de Taylor para mostrar que existe uma e uma só função analítica $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ satisfazendo

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$