Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática IV

$2^{\underline{o}}$ Semestre 2000/2001

$1^{\underline{o}}$ Teste - Todos os cursos excepto LEFT, LMAC

28 de Abril de 2001

Duração: 1 hora e 30 minutos
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. Seja $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$u(x,y) = e^{-y}\cos x + y(x-1).$$

(2 val.) a) Mostre que u é harmónica.

(2 val.) b) Determine uma função harmónica $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

seja analítica e satisfaça $f(0) = 1$.

(2 val.) c) Calcule

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-i)^2}dz$$

onde C é a circunferência de centro na origem e raio 2 percorrida uma vez no sentido directo.

Resolução:

a) Temos que mostrar que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Como

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-y}\operatorname{sen} x + y \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^{-y}\cos x + x - 1$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -e^{-y}\cos x \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{-y}\cos x,$$

$u(x,y)$ é uma função harmónica.

b) Queremos determinar uma função $v(x,y)$ que satisfaça as equações de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

A primeira equação vem

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -e^{-y} \operatorname{sen} x + y,$$

e primitivando em ordem a y obtemos

$$v(x, y) = e^{-y} \operatorname{sen} x + \frac{y^2}{2} + h(x),$$

para alguma função $h(x)$. Como

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-y} \operatorname{sen} x + \frac{y^2}{2} + h(x)\right) = e^{-y} \cos x + h'(x),$$

segue-se da segunda equação que

$$e^{-y} \cos x + h'(x) = e^{-y} \cos x - x + 1 \Leftrightarrow h(x) = -\frac{x^2}{2} + x + C,$$

e portanto

$$v(x, y) = e^{-y} \operatorname{sen} x + \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + x + C,$$

ou seja,

$$f(x + iy) = e^{-y} \cos x + y(x - 1) + i\left(e^{-y} \operatorname{sen} x + \frac{y^2 - x^2}{2} + x + C\right).$$

Como

$$f(0 + 0i) = 1 + iC$$

segue-se que para termos $f(0) = 1$ devemos escolher $C = 0$.

c) Aplicando a fórmula integral de Cauchy obtém-se

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z - i)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} \cdot f'(i).$$

Ora

$$f'(x + iy) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -e^{-y} \operatorname{sen} x + y + i\big(e^{-y} \cos x - x + 1\big),$$

e portanto

$$f'(0 + 1 \cdot i) = 1 + i\left(e^{-1} + 1\right).$$

Consequentemente,

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z - i)^2} dz = 2\pi\left(i - \frac{e + 1}{e}\right).$$

2. Seja $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = z^2 + (z - 1) \exp\left\{\frac{4}{(z - 1)^2}\right\}.$$

(2 val.) a) Obtenha a série de Laurent de f que é convergente em $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Indique e classifique a(s) singularidade(s) de f.

(2 val.) b) Seja C_1 a circunferência de centro em $z = 1 + i$ e raio 3, percorrida uma vez no sentido directo, e C_2 a circunferência de centro em $z = 1 + i$ e raio $\frac{1}{3}$, percorrida uma vez no sentido directo. Calcule

$$\oint_{C_1} f(z) dz \quad \text{e} \quad \oint_{C_2} f(z) dz.$$

Resolução:

a) Temos

$$e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!},$$

e portanto

$$\exp\left(\frac{4}{(z-1)^2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{4^n}{(z-1)^{2n}}.$$

Logo

$$\begin{aligned}
f(z) &= z^2 + (z-1)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n!} \cdot \frac{1}{(z-1)^{2n}} \\
&= (z-1+1)^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n!} \cdot \frac{1}{(z-1)^{2n-1}} \\
&= (z-1)^2 + 2(z-1) + 1 + (z-1) + \frac{4}{1!}\frac{1}{z-1} + \frac{4^2}{2!}\frac{1}{(z-1)^3} + \dots \\
&= 1 + 3(z-1) + (z-1)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n!}\frac{1}{(z-1)^{2n-1}}.
\end{aligned}$$

Como esta série possui potências negativas de ordens arbitrariamente elevadas, a função $f(z)$ tem uma singularidade essencial no ponto 1.

b) Como a singularidade não pertence ao interior da circunferência C_2, o teorema de Cauchy diz que

$$\oint_{C_2} f(z)\, dz = 0.$$

Por outro lado, o resíduo de f no ponto $z = 1$ é o coeficiente de $\dfrac{1}{z-1}$ na série de Laurent acima, ou seja, 4. Aplicando o teorema dos resíduos, obtemos

$$\oint_{C_1} f(z)\, dz = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}(f)(1) = 8\pi i.$$

(4 val.) **3.** Calcule o integral real

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}.$$

Justifique cuidadosamente a resposta.

Resolução: Seja $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$, e seja C_R o contorno na figura 1. Temos

$$f(z) = \frac{1}{\big((z-i)(z+i)\big)^2} = \frac{1}{(z-i)^2} \cdot \frac{1}{(z+i)^2}.$$

Logo $f(z)$ tem pólos de ordem 2 em $z = \pm i$.

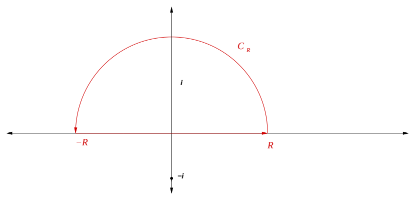

Figura 1: Contorno C_R.

Temos

$$\int_R^R f(x)\,dx = \int_{C_R} f(z)\,dz - \int_0^\pi f(Re^{i\theta}) iRe^{i\theta}\,d\theta.$$

Aplicando o teorema dos resíduos, obtemos

$$\int_{C_R} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \mathsf{Res}(f)(i) \qquad \text{se } R > 1.$$

Como f tem um pólo de ordem 2 em i,

$$\mathsf{Res}(f)(i) = \lim_{z\to i} 1! \frac{d}{dz}\left(\frac{(z-i)^2}{(z^2+1)^2}\right) = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(z+i)^2}\right) = -\frac{2}{(2i)^3} = \frac{1}{4i}.$$

Portanto,

$$\int_R^R f(x)\,dx = \frac{2\pi i}{4i} - \int_0^\pi f(Re^{i\theta}) iRe^{i\theta}\,d\theta.$$

Temos

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^\pi f(Re^{i\theta}) iRe^{i\theta}\,d\theta\right| &\le \int_0^\pi \left|f(Re^{i\theta}) iRe^{i\theta}\right| d\theta \\
&= \int_0^\pi \frac{R}{|R^2e^{i2\theta}+1|^2}\,d\theta \\
&\le \int_0^\pi \frac{R}{(R^2-1)^2}\,d\theta \\
&= \frac{R\pi}{(R^2-1)^2}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^\pi f(Re^{i\theta}) iRe^{i\theta}\,d\theta = 0,$$

e consequentemente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_R^R f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

(4 val.) **4.** Determine a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} - \dfrac{2t}{1+t^2} y = 1 \\ \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Resolução: Seja

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \exp\Big(\int \frac{-2t}{1+t^2}\,dt\Big) \\ &= \exp\big(-\log(1+t^2)\big) \\ &= \frac{1}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \mu \cdot \Big(\frac{dy}{dt} - \frac{2t}{1+t^2} y\Big) &= \mu \Leftrightarrow \\ \frac{d}{dt}(\mu \cdot y) &= \frac{1}{1+t^2} \Leftrightarrow \\ \frac{y}{1+t^2} &= \operatorname{arctg} t + C, \end{aligned}$$

onde C é uma constante. Aplicando a condição $y(0) = 0$, segue-se que

$$0 = \operatorname{arctg} 0 + C \Leftrightarrow C = 0.$$

Portanto $y(t) = (1+t^2)\operatorname{arctg} t$.

(2 val.) **5.** Mostre que se f e $\overline{f}$ são analíticas em $\mathbb{C}$ então f é constante.

Resolução: Se f e $\bar{f}$ são funções analíticas em $\mathbb{C}$, então a função

$$g(z) = f(z) + \bar{f}(z)$$

é analítica em $\mathbb{C}$. Seja $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, onde $u(x,y)$ e $v(x,y)$ são funções com valores reais. Segue-se que $g(z) = 2u(x,y)$ e a parte imaginária de g é nula. Aplicando as equações de Cauchy-Riemann à função g obtemos

$$\frac{\partial(2u)}{\partial x} = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial(2u)}{\partial y} = 0\,.$$

Logo $u(x,y)$ é constante. Analogamente a função

$$\frac{f - \bar{f}}{i} = 2v(x,y)$$

é analítica e a parte imaginária é nula. Logo $v(x,y)$ é constante. Segue-se portanto que $f(z)$ é constante.