Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática IV - 2º Semestre 2000/2001
2º Teste /1º Exame - 25 de Junho de 2001 - 17 h

Duração: Teste: 1 hora e 30 minutos; Exame: 3 horas
O 2º Teste começa na questão 5
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. Considere a função

$$u(x,y) = \log\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

definida no aberto $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\right\}$.

(1 val.) a) Mostre que u é uma função harmónica.

(1 val.) b) Determine uma função harmónica conjugada de u.

(1 val.) c) Seja f uma função analítica definida em D cuja parte real é u. Calcule

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-2)^2} dz$$

onde C é a circunferência de centro no ponto 2 e raio 1 percorrida uma vez no sentido directo.

2. Seja

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z-\pi} + \frac{1}{z}.$$

(1 val.) a) Determine a série de Laurent da função f na região $0 < |z-\pi| < \pi$.

(1 val.) b) Indique e classifique as singularidades de f.

(1 val.) c) Calcule

$$\oint_C f(z) dz$$

onde C é a circunferência de centro na origem e raio 4 percorrida uma vez no sentido directo.

(2 val.) **3.** Calcule

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)}{\sqrt{2}+\operatorname{sen}\theta} d\theta$$

utilizando o teorema dos resíduos. (**Sugestão:** $\cos(2\theta) = \operatorname{Re}\left(e^{2i\theta}\right)$).

(2 val.) **4.** Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{2t}{\cos y} \\ \\ y(0) = 2\pi \end{cases}$$

Explicite a solução e indique o seu intervalo máximo de definição.

Volte S. F. F.

Início do 2º Teste

(2 val.) **5.** Resolva o seguinte problema de valor inicial e indique o intervalo máximo de definição:

$$\begin{cases} t^3 - 2y^2 + 2ty\dot{y} = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

(3 val.) **6.** Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dddot{y} - 3\ddot{y} + 3\dot{y} - y = e^t \\ y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 0 \\ \ddot{y}(0) = 2 \end{cases}$$

7. Pretende-se resolver o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ \\ u(t,0) = \operatorname{sen} t \\ u(t,\pi) = 0 \\ \\ u(0,x) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) + 1 \end{cases}$$

$(t \geq 0, x \in]0,\pi[)$, correspondente a uma corda cuja extremidade $x = 0$ oscila.

(1 val.) a) Calcule a expansão em série de senos da função $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1$.

(1 val.) b) Determine uma solução particular da equação diferencial da forma $u(t,x) = g(x) \operatorname{sen} t$ que satisfaça também as condições de fronteira.

(1 val.) c) Resolva o problema.

8. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e $y_0 \geq 0$. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{y} = yf(t,y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

(0,5 val.) a) Mostre que este problema tem uma única solução numa vizinhança de $t = 0$.

(1,5 val.) b) Mostre que se f for limitada então a solução está definida para todo o $t \geq 0$.