Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática IV - 2º Semestre 2000/2001
2º Teste /1º Exame - 25 de Junho de 2001 - 17 h

Duração: Teste: 1 hora e 30 minutos; Exame: 3 horas
O 2º Teste começa na questão 5
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. Considere a função

$$u(x,y) = \log\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

definida no aberto $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\right\}$.

(1 val.) a) Mostre que u é uma função harmónica.
Resolução: Temos que mostrar que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

onde

$$u(x,y) = \log\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = \frac{1}{2}\log\left(x^2+y^2\right).$$

Como

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

a função u é harmónica.

(1 val.) b) Determine uma função harmónica conjugada de u.
Resolução: Queremos determinar uma função $v(x,y)$ que satisfaça as equações de Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Pela primeira equação temos

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1/x}{1+(y/x)^2},$$

e primitivando em ordem a y obtemos

$$v(x,y) = \operatorname{arctg}(y/x) + h(x),$$

para alguma função h. Como

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{arctg}(y/x) + h(x)\right) = -\frac{y}{x^2+y^2} + h'(x),$$

segue da segunda equação que

$$-\frac{y}{x^2+y^2} + h'(x) = -\frac{y}{x^2+y^2} \Leftrightarrow h(x) = C,$$

e então

$$v(x,y) = \operatorname{arctg}(y/x) + C$$

com C uma constante arbitrária.

(1 val.) c) Seja f uma função analítica definida em D cuja parte real é u. Calcule

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-2)^2} dz$$

onde C é a circunferência de centro no ponto 2 e raio 1 percorrida uma vez no sentido directo.

Resolução: Aplicando a fórmula integral de Cauchy obtém-se

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-2)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} \cdot f'(2).$$

com $f(x+yi) = u(x,y) + iv(x,y)$. Como

$$f'(x+yi) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2},$$

temos

$$f'(2+0i) = \frac{1}{2}.$$

Consequentemente,

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-2)^2} dz = \pi i.$$

Note-se que a resolução desta alínea não dependia da resolução da alínea b), uma vez que (em virtude das equações de Cauchy-Riemann) f' pode ser calculada apenas a partir de u:

$$f' = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

2. Seja

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z-\pi} + \frac{1}{z}.$$

(1 val.) a) Determine a série de Laurent da função f na região $0 < |z-\pi| < \pi$.

Resolução: Temos

$$\operatorname{sen} w = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} w^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

para todo o $w \in \mathbb{C}$ e então,

$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen}(\pi - z) = -\operatorname{sen}(z-\pi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (z-\pi)^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

(Alternativamente, podia-se ter usado a fórmula da série de Taylor no ponto π,

$$\operatorname{sen}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^{(n)}(\pi)}{n!}(z-\pi)^n,$$

notando que as derivadas da função $\operatorname{sen} z$ no ponto π ou são $\pm\cos\pi = \mp 1$ ou $\pm \operatorname{sen}\pi = 0$).
Por outro lado,

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{+\infty} w^n, \quad |w| < 1,$$

e então

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z-\pi+\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{z-\pi}{\pi}\right)} = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \left(\frac{z-\pi}{\pi}\right)^n,$$

pois $\left|\frac{z-\pi}{\pi}\right| < 1$. Consequentemente,

$$f(z) = \frac{1}{z-\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (z-\pi)^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \left(\frac{z-\pi}{\pi}\right)^n,$$

i.e.,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (z-\pi)^{2(n-1)}}{(2n-1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\pi^{n+1}} (z-\pi)^n .$$

(1 val.) b) Indique e classifique as singularidades de f.

Resolução: As singularidades de f são $z=\pi$ e $z=0$. Como a série de potências obtida na alínea $a)$ não possui potências negativas, concluímos que $z=\pi$ é uma singularidade removível.

Por outro lado, como

$$\lim_{z\to 0} z \cdot f(z) = \lim_{z \to 0}\left(z \cdot \frac{\operatorname{sen} z}{z-\pi} + 1\right) = 1 \neq 0,$$

concluímos que $z=0$ é um pólo simples.

(1 val.) c) Calcule

$$\oint_C f(z)dz$$

onde C é a circunferência de centro na origem e raio 4 percorrida uma vez no sentido directo.

Resolução: Como ambas as singularidades pertencem ao interior da circunferência C, temos pelo teorema dos resíduos que

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \cdot \left(Res(f)(\pi) + Res(f)(0)\right).$$

Como $z=\pi$ é uma singularidade removível temos que $Res(f)(\pi)=0$. Como $z=0$ é um polo simples temos, pela alínea $b)$, que $Res(f)(0) = \lim_{z\to 0} z \cdot f(z) = 1$. Concluímos assim que

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \cdot (0+1) = 2\pi i.$$

(2 val.) **3.** Calcule

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)}{\sqrt{2}+\operatorname{sen}\theta} d\theta$$

utilizando o teorema dos resíduos. (**Sugestão:** $\cos(2\theta) = \operatorname{Re}\left(e^{2i\theta}\right)$).

Resolução: Seguindo a sugestão, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)}{\sqrt{2}+\operatorname{sen}\theta} d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{Re}(e^{2i\theta})}{\sqrt{2}+\operatorname{sen}\theta} d\theta \\
&= \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \frac{e^{2i\theta}}{\sqrt{2}+\operatorname{sen}\theta} d\theta \\
&= \operatorname{Re} \oint_{|z|=1} \frac{z^2}{\sqrt{2}+\frac{z-z^{-1}}{2i}} \frac{1}{iz} dz \\
&= \operatorname{Re} \oint_{|z|=1} \frac{2z^2}{z^2+2i\sqrt{2}z-1} dz \\
&= \operatorname{Re} \oint_{|z|=1} \frac{2z^2}{\left(z+i\left(1+\sqrt{2}\right)\right)\left(z-i\left(1-\sqrt{2}\right)\right)} dz \\
&= \operatorname{Re}\left\{2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{2z^2}{\left(z+i\left(1+\sqrt{2}\right)\right)\left(z-i\left(1-\sqrt{2}\right)\right)}\right]\left((1-\sqrt{2})i\right)\right\} \\
&= \operatorname{Re}\left[2\pi i \frac{2\left(i\left(1-\sqrt{2}\right)\right)^2}{\left(i\left(1-\sqrt{2}\right)+i\left(1+\sqrt{2}\right)\right)}\right] \\
&= \operatorname{Re}\left[-2\pi\left(1-2\sqrt{2}+2\right)\right] \\
&= -6\pi+4\sqrt{2}\pi.
\end{aligned}$$

(2 val.) **4.** Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{2t}{\cos y} \\ \\ y(0) = 2\pi \end{cases}$$

Explicite a solução e indique o seu intervalo máximo de definição.

Resolução: A equação é separável, e pode ser prontamente resolvida:

$$\cos y \frac{dy}{dt} = 2t \Leftrightarrow \operatorname{sen} y = t^2 + C.$$

Substituindo as condições iniciais obtém-se $C = 0$, i.e.,

$$\operatorname{sen} y = t^2.$$

Para explicitar a solução, recorde-se que

$$\operatorname{sen} y = t^2 \Leftrightarrow y = \operatorname{arcsen} t^2 + 2k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z}) \text{ ou } y = \pi - \operatorname{arcsen} t^2 + 2k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Atendendo a que $y(0) = 2\pi$ e $\operatorname{arcsen} 0 = 0$ obtemos

$$y = 2\pi + \operatorname{arcsen} t^2$$

para

$$t \in \left]-1, 1\right[.$$

Como

$$\lim_{t\to\pm1} \frac{dy}{dt} = \lim_{t\to\pm1} \frac{2t}{\sqrt{1-t^2}} = \pm\infty$$

o intervalo de definição é $]-1,1[$.

Início do 2º Teste

(2 val.) **5.** Resolva o seguinte problema de valor inicial e indique o intervalo máximo de definição:

$$\begin{cases} t^3 - 2y^2 + 2ty\dot{y} = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Resolução: Seja $M = t^3 - 2y^2$ e $N = 2ty$. Tem-se

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -4y \quad \text{e} \quad \frac{\partial N}{\partial t} = 2y,$$

pelo que apesar da equação não ser exacta

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N} = \frac{-6y}{2ty} = \frac{-3}{t}$$

não depende de y e portanto a equação dada admite um factor de integração $\mu(t)$ tal que

$$\mu' = \frac{-3}{t}\mu.$$

Podemos tomar

$$\mu = \frac{1}{t^3}.$$

Multiplicando a equação por este factor obtemos

$$1 - 2\frac{y^2}{t^3} + 2\frac{y}{t^2}\dot{y} = 0.$$

Determinando ϕ tal que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\phi}{\partial t} = 1 - 2\dfrac{y^2}{t^3} \\[2ex] \dfrac{\partial\phi}{\partial y} = 2\dfrac{y}{t^2} \end{cases}$$

obtemos a menos de uma constante aditiva

$$\phi = t + \frac{y^2}{t^2}.$$

Então a solução pretendida é dada por

$$\phi\,(t,y) = \phi\,(1,1)$$

ou seja

$$t + \frac{y^2}{t^2} = 2,$$

donde

$$\begin{aligned} y &= \pm\sqrt{2t^2 - t^3} \\ &= \pm\, t\,\sqrt{2-t}. \end{aligned}$$

Como $y\,(1) = 1$, obtemos

$$y(t) = t\,\sqrt{2-t}.$$

Como

$$\lim_{t\to 2} y'\,(t) = -\infty$$

o intervalo máximo de definição da solução é $]-\infty, 2[$.

(3 val.) **6.** Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dddot{y} - 3\ddot{y} + 3\dot{y} - y = e^t \\ y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 0 \\ \ddot{y}(0) = 2 \end{cases}$$

Resolução: A equação homogénea associada é

$$(D^3 - 3D^2 + 3D - 1)y = 0 \Leftrightarrow (D-1)^3 y = 0.$$

A solução geral da equação homogénea é portanto

$$y = c_1\, e^t + c_2 t e^t + c_3 t^2 e^t.$$

Aplicando o operador $D-1$ à equação aniquilamos o lado direito. Vemos portanto que qualquer solução da equação tem que satisfazer

$$(D-1)^4 y = 0 \Leftrightarrow y = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 t^2 e^t + c_4 t^3 e^t.$$

Logo tem que existir uma solução particular da forma $z = c_4 t^3 e^t$. Temos

$$\dot{z} = c_4\left(3t^2 + t^3\right) e^t$$

$$\ddot{z} = c_4\left(6t + 6t^2 + t^3\right) e^t$$

$$\dddot{z} = c_4\left(6+18t+9t^2+t^3\right)e^t$$

$$\begin{aligned}\dddot{z}-3\ddot{z}+3\dot{z}-z &= c_4e^t\left(6+(18-18)\,t+(9-18+9)\,t^2+(1-3+3-1)\,t^3\right)\\ &= c_4 6e^t\end{aligned}$$

Portanto z é uma solução particular da equação diferencial se $c_4 = \dfrac{1}{6}$.

A solução pretendida tem a forma

$$\begin{aligned} y &= c_1\,e^t + c_2\,te^t + c_3\,t^2e^t + \frac{t^3}{6}e^t\\ &= \left(c_1 + c_2\,t + c_3\,t^2 + \frac{t^3}{6}\right)e^t.\end{aligned}$$

Como $y\,(0)=0$ vem $c_1=0$, donde

$$y = \left(c_2\,t + c_3\,t^2 + \frac{t^3}{6}\right)e^t$$

e

$$\dot{y} = \left(c_2 + (c_2+2c_3)\;t + \left(c_3+\frac{1}{2}\right)\;t^2 + \frac{t^3}{6}\right)e^t.$$

Como $\dot{y}\,(0)=0$ vem $c_2=0$, donde

$$\dot{y} = \left(2c_3\,t + \left(c_3+\frac{1}{2}\right)\;t^2 + \frac{t^3}{6}\right)e^t$$

e

$$\ddot{y} = \left(2c_3 + (4c_3+1)\;t + (c_3+1)\;t^2 + \frac{t^3}{6}\right)e^t.$$

Como $\ddot{y}\,(0)=2$ vem $c_3=1$, pelo que a solução é

$$y = t^2e^t + \frac{t^3}{6}e^t.$$

7. Pretende-se resolver o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\\ \\ u(t,0) = \operatorname{sen} t\\ u(t,\pi) = 0\\ \\ u(0,x) = 0\\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)+1\end{cases}$$

$(t\geq 0, x\in]0,\pi[)$, correspondente a uma corda cuja extremidade $x=0$ oscila.

(1 val.) a) Calcule a expansão em série de senos da função $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1$.

Resolução: Aplicando a fórmula para os coeficientes, vem

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{sen} nx dx = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^\pi = \frac{2\left[1-(-1)^n\right]}{n\pi}.$$

Portanto

$$1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\left[1-(-1)^n\right]}{n\pi} \operatorname{sen} nx$$

para $x \in]0, 1[$.

(1 val.) b) Determine uma solução particular da equação diferencial da forma $u(t, x) = g(x) \operatorname{sen} t$ que satisfaça também as condições de fronteira.

Resolução: Para que $u(t, x) = g(x) \operatorname{sen} t$ satisfaça as condições de fronteira é necessário que

$$u(t, 0) = \operatorname{sen} t \Leftrightarrow g(0) \operatorname{sen} t = \operatorname{sen} t \Leftrightarrow g(0) = 1$$

e

$$u(t, \pi) = 0 \Leftrightarrow g(\pi) \operatorname{sen} t = 0 \Leftrightarrow g(\pi) = 0.$$

Para que $u(t, x) = g(x) \operatorname{sen} t$ satisfaça a equação devemos ter

$$-g(x) \operatorname{sen} t - 4g''(x) \operatorname{sen} t = 0 \Leftrightarrow g''(x) + \frac{1}{4} g(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = A \cos\left(\frac{x}{2}\right) + B \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right).$$

De $g(\pi) = 0$ obtemos $B = 0$, e de $g(0) = 1$ vem $A = 1$. Uma solução particular que satisfaz também as condições de fronteira é então

$$u(t, x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \operatorname{sen} t.$$

(1 val.) c) Resolva o problema.

Resolução: Escrevemos então

$$u(t, x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \operatorname{sen} t + v(t, x).$$

Como $v(t, x)$ é a diferença de duas soluções da equação diferencial que satisfazem as condições de fronteira, é necessariamente uma solução da equação com condições de fronteira nulas. Na verdade, $v(t, x)$ satisfaz

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - 4\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \\ \\ v(t, 0) = 0 \\ v(t, \pi) = 0 \\ \\ v(0, x) = u(0, x) - 0 = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t}(0, x) = \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) - \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos 0 = \cos\left(\frac{x}{2}\right) + 1 - \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

Este problema homogéneo é facilmente resolvido pelo método de separação de variáveis: fazendo

$$v(t,x) = T(t)X(x)$$

obtemos

$$\ddot{T}X - 4TX'' = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}\frac{\ddot{T}}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda$$

para $\lambda \in \mathbb{R}$ constante (uma vez que só as funções constantes não dependem nem de t nem de x. Impondo as condições de fronteira obtemos o problema de valores na fronteira para X

$$\begin{cases} X'' = \lambda X \\ X(0) = 0 \\ X(\pi) = 0 \end{cases}$$

Como se sabe, este problema só admite soluções não triviais para certos valores negativos de λ. Escrevendo então $\lambda = -\omega^2$ (com $\omega \in \mathbb{R}^+$) vem

$$X'' - \omega^2 X = 0 \Leftrightarrow X(x) = A\cos(\omega x) + B\,\mathrm{sen}(\omega x).$$

De $X(0) = 0$ obtemos $A = 0$, e de $X(\pi) = 0$ obtemos $B = 0$ (solução trivial) ou

$$\mathrm{sen}(\omega\pi) = 0 \Leftrightarrow \omega = n \in \mathbb{N}.$$

Portanto obtemos soluções não triviais para $\lambda = -n^2$. A equação para $T(t)$ fica então

$$\ddot{T} = -4n^2 T \Leftrightarrow T = \alpha\cos(2nt) + \beta\,\mathrm{sen}(2nt).$$

Podemos impor a condição inicial $v(0,x) = 0$ fazendo $T(0) = 0$, i.e., $\alpha = 0$. Resulta portanto que para cada $n \in \mathbb{N}$ a função

$$v_n(t,x) = c_n\,\mathrm{sen}(nx)\,\mathrm{sen}(2nt)$$

é uma solução não trivial da equação, das condições de fronteira e de uma das condições iniciais. Portanto

$$v(t,x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\,\mathrm{sen}(nx)\,\mathrm{sen}(2nt),$$

donde

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2nc_n\,\mathrm{sen}(nx)\cos(2nt),$$

e portanto

$$\frac{\partial v}{\partial t}(0,x) = 1 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} 2nc_n\,\mathrm{sen}(nx) = 1 \Leftrightarrow c_n = \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}.$$

pela alínea a).

8. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e $y_0 \geq 0$. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{y} = yf(t,y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

(0,5 val.) a) Mostre que este problema tem uma única solução numa vizinhança de $t = 0$.

Resolução: Como $f(t, y)$ é de classe C^1 e y é de classe C^∞ segue-se que $yf(t, y)$ é de classe C^1 e portanto localmente Lipschitziana. Pelo Teorema de Picard-Lindelöf o problema de valor inicial tem solução única numa vizinhança de $t = 0$.

(1,5 val.) b) Mostre que se f for limitada então a solução está definida para todo o $t \geq 0$.

Resolução: Seja I^+ a intersecção do intervalo máximo de definição com $[0, +\infty[$. Como o domínio de f é $\mathbb{R}^2$, I^+ só não será igual a $[0, +\infty[$ se a solução explodir em $[0, +\infty[$. Como $y_0 \geq 0$, segue-se que em I^+ a solução do problema será $\geq$ que a solução de

$$\begin{cases} \dot{y} = yf(t, y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

i.e., $y(t) \geq 0$ em I^+. Por outro lado, se f for limitada, $|f| \leq M$, e atendendo a que $y \geq 0$, vemos que a solução do problema será $\leq$ que a solução do problema

$$\begin{cases} \dot{y} = yM \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

i.e., $y \leq y_0 e^{Mt}$. Logo a solução do nosso problema não pode explodir, e portanto está definida para todo o $t \geq 0$.