

Análise Matemática IV
2º semestre de 2000/2001

Exercício-teste 12

Seja $k > 0$. Resolva o seguinte equação de calor com as condições de Dirichlet:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \\ u(t, 0) &= 0 \\ u(t, 1) &= 0 \\ u(0, x) &= 5(1+x)^2 - 15x - 5.\end{aligned}$$

Resolução

Designa-se por $f(x) = 5(1+x)^2 - 15x - 5$. A solução $u(t, x)$ é dada por

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-kn^2\pi^2 t} \operatorname{sen}(n\pi x), \quad b_n = 2 \int_0^1 f(x) \cdot \operatorname{sen}(n\pi x) dx$$

Tem-se que

$$\begin{aligned}b_n &= 2 \int_0^1 (5(1+x)^2 - 15x - 5) \cdot \operatorname{sen}(n\pi x) dx \\ &= 2 \int_0^1 5(x^2 - x) \cdot \operatorname{sen}(n\pi x) dx \\ &= 10 \cdot \left[\frac{-2 + 2 \cos(n\pi)}{n^3 \pi^3} \right] \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ -\frac{40}{n^3 \pi} & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}\end{aligned}$$

Logo

$$u(t, x) = -\frac{40}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-k(2n+1)^2\pi^2 t} \cdot \frac{\operatorname{sen}((2n+1)\pi x)}{(2n+1)^3}.$$