Análise Matemática IV
2º semestre de 2000/2001

Exercício-teste 2

Considere-se a função

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{(\bar{z})^2}{z} & \text{se } z \neq 0, \\ 0 & \text{se } z = 0. \end{cases}$$

Determine se $f'(0) = \lim\limits_{z \to 0} \frac{f(z)}{z}$ existe.

Resolução

Se $z \neq 0$ então existem $r > 0$ e $0 \leq \theta < 2\pi$ tais que $z = r\,\mathrm{cis}(\theta)$. Note-se que $\mathrm{cis}(\theta) = \cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)$. Obtém-se que

$$\frac{f(z)}{z} = \frac{(\bar{z})^2}{z^2} = \frac{r^2\,\mathrm{cis}(-2\theta)}{r^2\,\mathrm{cis}(2\theta)} = \mathrm{cis}(-4\theta).$$

Segue-se que $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{f(z)}{z}$ não existe. Por exemplo, se $z = r\,\mathrm{cis}(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}r}{2}(1+i)$, então

$$\lim_{r \to 0} \frac{f\big(r\,\mathrm{cis}(\frac{\pi}{4})\big)}{r\,\mathrm{cis}(\frac{\pi}{4})} = \mathrm{cis}\,(-\pi) = -1,$$

e se $z = r\,\mathrm{cis}(0) = r$, então

$$\lim_{r \to 0} \frac{f\big(r\,\mathrm{cis}(0)\big)}{r\,\mathrm{cis}(0)} = \mathrm{cis}\,(0) = 1.$$

***

A título de curiosidade, note-se que se $z \neq 0$ tem-se que $f(z) = \dfrac{(\bar{z})^2}{z} = \dfrac{(\bar{z})^2}{z}\dfrac{\bar{z}}{\bar{z}} = \dfrac{(\bar{z})^3}{|z|^2}$. Logo

$$u(x,y) = \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2+y^2} \qquad v(x,y) = \frac{y^3 - 3x^2y}{x^2+y^2},$$

onde $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Segue-se que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^3} = 1 \qquad \frac{\partial v}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{y^3}{y^3} = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^3} = 0 \qquad -\frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} -\frac{0}{x^3} = 0,$$

e as equações de Cauchy-Riemann são válidas na origem. Mas as derivadas parcias $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ e $\frac{\partial v}{\partial y}$ não são contínuas na origem. Por exemplo, se $(x,y) \neq (0,0)$ tem-se que

$$u(x,y) = \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2+y^2} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{(3x^2-3y^2)(x^2+y^2) - 2x(x^2-3xy^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{3(x^2-y^2)(x^2+y^2) - 2x(x^2-3xy^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{3(x^4-y^4) - 2x(x^2-3xy^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{x^4+6x^2y^2-3y^4}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{x^4+2x^2y^2+y^4+4x^2y^2-4y^4}{(x^2+y^2)^2} \\ &= 1 + 4y^2\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

Ora, se $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial u}{\partial x}$ existisse, então

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} 1 + 4y^2\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \lim_{(x,x)\to(0,0)} 1 + 4x^2\frac{x^2-x^2}{(x^2+x^2)^2}, \qquad \text{onde } x = y \\ &= 1 \\ &= \lim_{(0,y)\to(0,0)} 1 + 4y^2\frac{-y^2}{y^4}, \qquad \text{onde } x = 0 \\ &= -3 \end{aligned}$$

que é absurdo.