Análise Matemática IV
2º semestre de 2000/2001

Exercício-teste 3

Determine os conjuntos de soluções das seguintes equações:

1. $e^z = i$
2. $e^{2zi} = -1$
3. $e^z = 1 + i$
4. $e^{zi} + e^{-zi} + 2 = 0$

Resolução

1. As soluções de $e^z = i$ são os números da forma
$$z = \ln|i| + (\arg i + 2k\pi)\, i,$$
para algum $k \in \mathbb{Z}$, ou seja, são
$$z = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) i, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

2. As soluções de $e^{2zi} = -1$ são os números complexos que satisfazem a equação,
$$2zi = \ln|-1| + (\arg(-1) + 2k\pi)\, i$$
para algum $k \in \mathbb{Z}$, ou seja, são os números
$$z = \frac{1}{2}\,(\pi + 2k\pi)\,, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

3. As soluções de $e^z = 1 + i$ são os números da forma
$$z = \ln|1+i| + (\arg(1+i) + 2k\pi)\, i,$$
para algum $k \in \mathbb{Z}$, ou seja, são
$$z = \ln\sqrt{2} + \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) i, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

4. As soluções de $e^{zi}+e^{-zi}+2=0$, são os números complexos que satisfazem a equação,

$$(e^{zi})^2+2e^{zi}+1=0,$$

ou seja,

$$\left(e^{zi}+1\right)^2=0.$$

São então os complexos z, tais que

$$zi=ln|-1|+(\arg(-1)+2k\pi)\,i \qquad k\in\mathbb{Z},$$

i.e. $z=\pi+2k\pi$ para algum $k\in\mathbb{Z}$.