

Análise Matemática IV

2º semestre de 2000/2001

Exercício-teste 7

Considere a equação diferencial

$$y(1 + ty) + (2y - t)y' = 0$$

com a condição inicial $y(0) = 1$. Determine uma equação que implicitamente define uma solução $y = y(t)$.

Resolução

Sejam $M(t, y) = y(1 + ty)$ e $N(t, y) = 2y - t$. Então

$$\begin{aligned}\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{M} &= \frac{1 + ty + yt - (-1)}{y(1 + ty)} \\ &= \frac{2}{y}.\end{aligned}$$

Seja

$$\mu(y) = \exp\left(-\int \frac{2}{y} dt\right) = \frac{1}{y^2}.$$

Segue-se que a equação

$$\frac{1}{y^2}(y(1 + ty) + (2y - t)y') = 0$$

é exacta, e existe $\varphi(t, y)$ tal que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1 + ty}{y} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{2y - t}{y^2}.$$

Logo $\varphi(t, y) = t/y + t^2/2 + h(y)$, para alguma função h . Como

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{2y - t}{y^2} \\ &= -\frac{t}{y^2} + h'\end{aligned}$$

segue-se que $h'(y) = 2/y$ e $h(y) = \log(y^2)$. Portanto

$$\varphi(t, y) = \frac{t}{y} + \frac{t^2}{2} + \log(y^2).$$

Aplicando a condição $y(0) = 1$ obtemos que

$$\varphi(0, 1) = 0 + 0 + 0 = 0,$$

Como

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(0, 1) = 2 \neq 0$$

obtemos que a equação $\varphi(t, y) = 0$ determina uma solução implícita