Aníalise Matemática IV

2º semestre de 2000/2001

Exercício-teste 7

Considere a equação diferencial

$$y(1+ty)+(2y-t)\dot{y}=0$$

com a condição inicial $y(0)=1$. Determine uma equação que implicitamente define uma solução $y=y(t)$.

Resolução

Sejam $M(t,y)=y(1+ty)$ e $N(t,y)=2y-t$. Então

$$\begin{aligned}\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial t}}{M}&=\frac{1+ty+yt-(-1)}{y(1+ty)}\\&=\frac{2}{y}.\end{aligned}$$

Seja

$$\mu(y)=\exp\bigl(-\int\frac{2}{y}\,dt\bigr)=\frac{1}{y^2}.$$

Segue-se que a equação

$$\frac{1}{y^2}\bigl(y(1+ty)+(2y-t)\dot{y}\bigr)=0$$

é exacta, e existe $\varphi(t,y)$ tal que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{1+ty}{y}\qquad\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{2y-t}{y^2}.$$

Logo $\varphi(t,y)=t/y+t^2/2+h(y)$, para alguma função h. Como

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial y}&=\frac{2y-t}{y^2}\\&=-\frac{t}{y^2}+h'\end{aligned}$$

segue-se que $h'(y) = 2/y$ e $h(y) = \log(y^2)$. Portanto

$$\varphi(t, y) = \frac{t}{y} + \frac{t^2}{2} + \log(y^2).$$

Aplicando a condição $y(0) = 1$ obtemos que

$$\varphi(0, 1) = 0 + 0 + 0 = 0,$$

Como

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(0, 1) = 2 \neq 0$$

obtemos que a equação $\varphi(t, y) = 0$ determina uma solução implícita