Análise Matemática IV
$2^{\underline{o}}$ semestre de 2000/2001

Exercício-teste 8

Prove que $y(t) = 0$ para todo o $t \in \mathbb{R}$, é a única solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = yt^2(t + y^2) \\ \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

Resolução

Seja $f(t, y) = yt^2(t + y^2)$. A função $y(t) = 0$ para todo o $t \in \mathbb{R}$ é claramente uma solução do problema de valor inicial, p ois $\frac{dy}{dt} = 0$ e $f(t, 0) = 0$.

Como f é contínua em $\mathbb{R}^2$ e

$$\frac{\partial f}{\partial y} = t^2(t + 3y^2)$$

existe e é contínua em $\mathbb{R}^2$, f é localmente lipschitziana em relação a y em $\mathbb{R}^2$. Então, pelo teorema de Picard, qualquer problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t, y) = yt^2(t + y^2) \\ \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

tem uma única solução numa vizinhança de t_0.

Conclui-se assim que $y(t) = 0$ para todo o $t \in \mathbb{R}$ é a única solução de

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = yt^2(t + y^2) \\ \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

De facto, o gráfico de qualquer outra solução intersectaria o gráfico desta num ponto (t_0, y_0), e não teriamos unicidade local de solução do problema de valor inicial com $y(t_0) = y_0$.