Análise Matemática IV
2º semestre de 2000/2001

Exercício-teste 9

Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule e^{tA}.

(b) Resolva o problema de valor inicial:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \quad , \quad \mathbf{x}(0) = (0,0,1)$$

Resolução

(a) Começamos por determinar os valores próprios de A. Temos que:

$$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^2(-1-\lambda) - 3(1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 4).$$

Os valores próprios de A são, pois, $\lambda_1 = 1)$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = -2$. Resulta pois que A é diagonalizável. Vamos agora calcular os vectores próprios de A. Um vector próprio (associado a λ_1) é qualquer solução não nula de

$$(A - \lambda_1 I)\mathbf{v_1} = \mathbf{0},$$

ou, fazendo $v_1 = (a,b,c)$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resulta então que $c = a$ e $b = -a$, pelo que podemos tomar $\mathbf{v_1} = (1,-1,1)$ como o vector próprio assocido a $\lambda_1 = 1$. Fazendo o mesmo com os outros valores próprios, obtemos (por exemplo) $\mathbf{v_2} = (1,0,1)$ e $\mathbf{v_3} = (1,0,-3)$.

A matriz de mudança da base canónica para a base dos vectores próprios $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ é:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Se M é a matriz dos cofactores de S, a inversa de S é dada por:

$$S^{-1} = \frac{1}{\det S} M^T = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 4 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Desta forma:

$$e^{tA} = S e^{t\Lambda} S^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3e^{2t} + e^{-2t} & -4e^t + 4e^{2t} & e^{2t} - e^{-2t} \\ 0 & 4e^t & 0 \\ 3e^{2t} - 3e^{-2t} & -4e^t + 4e^{2t} & e^{2t} + 3e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

(b) A solução do problema de valor inicial é:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = e^{tA} x_0 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3e^{2t} + e^{-2t} & -4e^t + 4e^{2t} & e^{2t} - e^{-2t} \\ 0 & 4e^t & 0 \\ 3e^{2t} - 3e^{-2t} & -4e^t + 4e^{2t} & e^{2t} + 3e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} e^{2t} - e^{-2t} \\ 0 \\ e^{2t} + 3e^{-2t} \end{bmatrix}.$$