Análise Matemática IV

Problemas para as Aulas Práticas
($5^{\underline{a}}$ a $8^{\underline{a}}$ semana)

Cursos: **Todos**

$1^{\underline{o}}$ semestre de 2000/01

Semana 5

41. Considere a seguinte função $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$u(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy(x+y)$$

   (a) Mostre que u é uma função harmónica.

   (b) Determine a função harmónica conjugada v tal que $v(0,0) = 0$.

   (c) Calcule

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-1)^2}\,dz,$$

   onde $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy$ e C é a curva $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ percorrida no sentido positivo.

42. Determine o desenvolvimento em série de Laurent na região $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ da função

$$g(z) = \left(z - z^3\right) e^{\frac{1}{z}},$$

e calcule

$$\oint_C \left(\frac{1}{z-4} + \left(z - z^3\right) e^{\frac{1}{z}}\right) dz,$$

onde C é a curva $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 3\}$ percorrida no sentido positivo.

43. Utilize o Teorema dos Resíduos para calcular

$$\oint_C \frac{z^4+1}{z^2\,(2z^2+5z+2)}\,dz,$$

onde C é a curva $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ percorrida no sentido positivo.

Aproveite este resultado para calcular

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)}{5+4\cos(\theta)}d\theta.$$

44. Seja f uma função complexa de variável complexa. Mostre que se

$$L = \lim_{n\to\infty} \left((n+1) \left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{f^{(n+1)}(z_0)} \right| \right)$$

existir e for finito, então f tem uma singularidade não removível num ponto z tal que $|z - z_0| = L$.

45. Seja $f(z) = \dfrac{z\mathrm{sen}(z)}{\cos(z)-1} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k(z-4i)^{k-1}}$, e $D(f)$ o seu domínio de definição.

(a) Determine o desenvolvimento em série de Taylor da função $z\,\mathrm{sen}(z)$ em potências de $z - 2\pi$.

(b) Determine o interior da região de convergência da série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k(z-4i)^{k-1}}$.

(c) Classifique, justificando, as singularidades de f e determine os respectivos resíduos.

(d) Calcule os valores possíveis de $\displaystyle\oint_\Gamma f(z)dz$, onde Γ é uma curva simples, fechada e seccionalmente regular, contida na região

$$\{z \in \mathbb{C} : -3\pi < \mathrm{Re}(z) < 3\pi\} \cap D(f)$$

e tal que os pontos $\pm 2\pi$ estão contidos na região delimitada por Γ.

46. Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais, indicando os intervalos de definição das funções.

(a) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{1+t^2}$.

(b) $\dfrac{dy}{dt} + \cos t\ y = 0$.

(c) $\dfrac{dy}{dt} - \sin t\ y = e^{-\cos t}$.

47. Determine a solução do seguintes problemas de valor inicial, indicando os intervalos máximos de definição:

    (a) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + \sqrt{1-t^2}\; y = 0 \\ y(0) = e^5 \; . \end{cases}$

    (b) $\begin{cases} L\dfrac{di}{dt} + Ri = V \sin t \\ i(0) = 0 \; . \end{cases}$

    (c) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + y = g(t) \\ y(0) = 0 \; , \end{cases}$, onde $g(t) = \begin{cases} e^{-(t-1)} & \text{se} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 1 & \text{se} \quad t > 1 \; . \end{cases}$

48. Determine a solução geral da seguinte equação diferencial:

$$(1+t)\frac{dy}{dt} + \frac{y}{2} = (1+t)^{\frac{5}{2}} \; .$$

49. Numa substância radioactiva, o fenómeno de decaimento é aleatório: todos os núcleos atómicos têm a mesma probabilidade P de decaimento por unidade de tempo, e núcleos distintos comportam-se independentemente.

    Suponha que em $t = 0$ existem N_0 núcleos dessa substância. Determine quantos núcleos $N(t)$ existirão no instante t. (Sug.: a probabilidade é, neste caso, o mesmo que a frequência relativa).

50. Dada uma equação diferencial $\dfrac{dy}{dt} + a(t)\, y = f(t)$ com $a(t)$ e $f(t)$ contínuas em $\mathbb{R}$, $a(t) \geqslant c > 0$ e $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$, mostre que todas as soluções tendem para zero quando t tende para infinito.

Semana 6

51. O modelo mais simples para evaporação de uma gota de água esférica é supor que a diminuição de volume da gota se processa a uma taxa proporcional à sua superfície.

    (a) Qual o tempo necessário para que uma gota de raio R_0 se evapore completamente?

    (b) Se supusermos que a taxa de diminuição de volume da gota é proporcional ao *quadrado* da sua superfície, quanto tempo demora uma gota de raio R_0 a evaporar-se completamente?

52. Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais:

    (a) $(1+t^2)\,\dfrac{dy}{dt} = 1 + y^2$ (sugestão: $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \; \tan y}$).

    (b) $\dfrac{dy}{dt} - y^2 = 1 + t + ty^2$

53. Nas alíneas seguintes determine a solução do problema de Cauchy e o intervalo de existência de cada solução :

    (a) $\cos y \, \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{-t \sin y}{1+t^2}$, $\quad y(1) = \dfrac{\pi}{4}$.

    (b) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{2\,t}{y - y\,t^2}$, $\quad y(2) = 3$.

54. Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} y(t)y'(t) = t \\ y(1) = \alpha \end{cases}$$

e diga para que valores de α é que a solução está definida para todo o $t \in \mathbb{R}$.

55. Determine a constante α para a qual a equação diferencial seguinte é exacta e resolva-a:

$$ty(y + \alpha e^{\alpha t^2 y}) + t^2(y + e^{\alpha t^2 y})\frac{dy}{dt} = 0 \ .$$

56. Determine a solução geral da seguinte equação diferencial:

$$y \sinh(ty) + \sinh(y) + t(\sinh(ty) + \cosh(y))\frac{dy}{dt} = 0 \ .$$

57. Resolva o seguinte problema de valor inicial e determine o intervalo de definição da solução:

$$\begin{cases} y \cos t + 2\,(y^2 + \sin t)\,\dfrac{dy}{dt} = 0 \\ y(0) = \sqrt[4]{2} \ . \end{cases}$$

58. Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} 4yt + 2t + 2t^3 + 2t \sin y + (2 + \cos y)\dfrac{dy}{dt} = 0 \\ y(0) = 0 \ . \end{cases}$$

Determine uma equação que define implicitamente a solução $y(t)$ e mostre que o intervalo de definição desta solução é $\mathbb{R}$.

59. Determine a solução dos seguintes problemas de valor inicial indicando o intervalo máximo onde essa solução está definida.

    (a) $ty^2 + 1 + 2t^2yy' = 0, \;\; y(1) = 2.$

    (b) $y - 2t^2 + [2ty + t\log(t)]\, y' = 0, \;\; y(1) = 2.$

60. A equação diferencial

$$\cosh y + (e^{-t} + e^{y})\frac{dy}{dt} = 0$$

admite um factor de integração da forma $\mu(t + y)$, ou seja, um factor μ que só depende da soma das variáveis $t + y$. Determine-o e dê a solução da equação com $y(0) = 0$.

Sugestão: A equação diferencial que $\mu = \mu(t+y)$ satisfaz pode ser escrita em termos de uma só variável $v = t + y$.

Semana 7

61. Resolva a equação $y' + y = e^t y^2$. (Sugestão: faça a mudança de variável $y = 1/u$)

62. Determine a solução geral da equação $ty' = (1 + t)y + y^2$. (Sugestão: faça a mudança de variável $y = tv$)

63. Suponha que temos uma equação diferencial da forma ($a \neq 0$)

$$\frac{dy}{dt} = f\,(ay + bt + c)\;\; ,$$

como, por exemplo, a equação $\dfrac{dy}{dt} = \operatorname{sen}(y+2t+3)$. Como o segundo membro da equação depende apenas de $ay + bt + c$, é natural fazer a substituição $v = ay + bt + c$, ou seja, $y = \dfrac{v - bt - c}{a}$.

Mostre que esta substituição transforma $\dfrac{dy}{dt} = f(ay + bt + c)$ na equação equivalente

$$\frac{dv}{dt} = af(v) + b\;,$$

que é separável. Aproveite este resultado para resolver a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = -\left((t+y)^2 + 1\right)\arctan\,(t + y) - 1\;.$$

64. Toda a equação diferencial da forma $\dot{y} = f(y)$ é separável. Estas equações diferenciais de 1.^{a} ordem em que o tempo não aparece explicitamente dizem-se *autónomas.* Todas elas podem, em princípio, ser resolvidas. Suponha agora que temos uma equação diferencial da forma

$$\frac{dy}{dt} = f\left(\frac{y}{t}\right),$$

como por exemplo $\dfrac{dy}{dt} = \sin\left(\dfrac{y}{t}\right)$. Estas equações dizem-se *homogéneas.* O facto de o membro esquerdo da equação depender apenas do quociente $\dfrac{y}{t}$ sugere que se faça a substituição $v = \dfrac{y}{t}$, ou seja $y = v\,t$.

(a) Mostre que esta substituição transforma $\dfrac{dy}{dt} = f\left(\dfrac{y}{t}\right)$ na equação equivalente

$$t\,\frac{dv}{dt} + v = f(v)$$

que é separável.

(b) Determine a solução geral da equação $\dfrac{dy}{dt} = 2\,\dfrac{y}{t} + \left(\dfrac{y}{t}\right)^2$.

(c) Determine a solução da equação da alínea anterior que satisfaz $y(1) = -1$.

65. Determine a solução geral das seguintes equações :

(a) $2\,t\,y\dfrac{dy}{dt} = 3\,y^2 - t^2$.

(b) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{t+y}{t-y}$.

Sugestão: Exercício 64

66. Chama-se *equação de Bernoulli* a uma equação diferencial da forma

$$\frac{dy}{dt} + a(t)\,y = b(t)\,y^n\ .$$

Determine a solução geral desta equação . Sugestão : divida ambos os lados por y^n e mediante a mudança de variáveis $u = y^{1-n}$ transforme-a numa equação linear em u.

67. Para cada uma das seguintes equações diferenciais, esboce o campo de direcções e trace os respectivos tipos de soluções .

(a) $y' = t^2 - y^2$, (b) $y' = \dfrac{t\,y}{1+t^2}$,

(c) $y' = (2-y)\,(y-1)$, (d) $y' = y\,(1-y^2)$,

(e) $y' = \sin(y-t)$, (f) $y' = \dfrac{y+t}{y-t}$,

68. Mostre que existe uma solução de classe C^1 para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 6t\sqrt[3]{y^2} \\ y(0) = 0 \ , \end{cases}$$

diferente da solução $y(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Explique porque é que isto não contradiz o teorema de Picard.

69. Mostre que o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{3y^2 + \sqrt[3]{(t+1)^2}} \\ y(0) = 1 \ , \end{cases}$$

tem uma única solução $y(t)$, definida para $t \in [0, +\infty[$, e calcule $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$.

Sugestão: Não tente resolver a equação diferencial. Considere a função $u(t)$ definida por

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{3u^2} \\ u(0) = 1 \ . \end{cases}$$

Uma vez determinada a função $u(t)$, mostre que

$$\frac{dy}{dt} \geqslant \frac{1}{3\,(u(t))^2 + \sqrt[3]{(t+1)^2}} \ ,$$

e integre esta relação entre 0 e t.

70. Considere a equação diferencial

$$\begin{cases} y' = -yg(t,y) + e^{-t} \\ y(0) = y_0 > 0, \end{cases}$$

onde $g : \mathbb{R}^2 \to [1, +\infty[$ tem derivadas parciais contínuas para todo o $(t, y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Mostre que a solução da equação dada está definida para todo o t positivo.

(b) O que pode dizer quanto ao limite de y quando $t \to +\infty$?

Semana 8

71. Considere as seguintes matrizes:

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Para cada uma das matrizes $\mathbf{A}$ acima indicadas, responda às seguintes questões:

(a) Calcule $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^3$ e $\mathbf{A}^4$.

(b) Intua uma fórmula para $\mathbf{A}^n$, com $n \in \mathbb{N}$, e demonstre-a pelo princípio de indução matemática.

(c) Calcule $e^{t\mathbf{A}}$ através da definição (i.e. $e^{t\mathbf{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\mathbf{A}^n$).

72. Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{S}$ duas matrizes $n \times n$, com $\det \mathbf{S} \neq 0$. Mostre que

(a) $\operatorname{tr} \mathbf{SAS}^{-1} = \operatorname{tr} \mathbf{A}$.

(b) $\det \mathbf{SAS}^{-1} = \det \mathbf{A}$.

(c) $\det e^{t\mathbf{A}} = e^{t \operatorname{tr} \mathbf{A}}$.

73. Considere as seguintes matrizes:

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (d) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(e) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ (f) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Para cada uma das matrizes $\mathbf{A}$ acima indicadas, responda às seguintes questões:

(a) Calcule $e^{t\mathbf{A}}$.

(b) Resolva o problema de valor inicial,

$$\dot{u} = \mathbf{A}u, \qquad u(0) = (1, 1, 1).$$

74. Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Determine $e^{t\mathbf{A}}$ e resolva o problema de valor inicial $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.

75. Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Determine $e^{\mathbf{A}t}$ e resolva o problema de valor inicial $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(\pi/2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$.

76. Determine a solução geral do seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} x' = 14x - 10y + 1 \\ y' = 10x - 2y + 2 \end{cases}$$

Sugestão: Determine primeiro uma solução particular constante.

77. Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x' = -2x + 4y + t^6 \\ y' = -x + 2y + t^5 \end{cases}, \qquad x(0) = y(0) = 1.$$

78. Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x' = 2x - 2y + t \\ y' = x - y + e^t \end{cases}, \qquad x(0) = y(0) = 0.$$

79. Determine uma matriz 2×2, $\mathbf{A}$, tal que uma das soluções de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\,\mathbf{x}$ seja

$$\mathbf{x}(t) = \left(e^{2t} - 2e^{-t}\,,\; e^{2t} + 4\,e^{-t}\right) .$$

A solução encontrada é única?

80. Determine uma matriz 4×4, $\mathbf{A}$, tal que uma das soluções de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\,\mathbf{x}$ seja

$$\mathbf{x}(t) = \left(\sin 2t\,,\; \cos 2t\,,\; (t+1)\,e^t\,,\; (t-1)\,e^t\right) .$$

A solução encontrada é única?