

# Análise Matemática IV

## Problemas para as Aulas Práticas

(5<sup>a</sup> a 8<sup>a</sup> semana)

Cursos: **Todos**

1<sup>o</sup> semestre de 2000/01

### Semana 5

41. Considere a seguinte função  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$u(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy(x + y)$$

- (a) Mostre que  $u$  é uma função harmônica.
- (b) Determine a função harmônica conjugada  $v$  tal que  $v(0, 0) = 0$ .
- (c) Calcule

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-1)^2} dz,$$

onde  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ,  $z = x + iy$  e  $C$  é a curva  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$  percorrida no sentido positivo.

42. Determine o desenvolvimento em série de Laurent na região  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  da função

$$g(z) = (z - z^3) e^{\frac{1}{z}},$$

e calcule

$$\oint_C \left( \frac{1}{z-4} + (z - z^3) e^{\frac{1}{z}} \right) dz,$$

onde  $C$  é a curva  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 3\}$  percorrida no sentido positivo.

43. Utilize o Teorema dos Resíduos para calcular

$$\oint_C \frac{z^4 + 1}{z^2(2z^2 + 5z + 2)} dz,$$

onde  $C$  é a curva  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  percorrida no sentido positivo.

Aproveite este resultado para calcular

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)}{5 + 4\cos(\theta)} d\theta.$$

44. Seja  $f$  uma função complexa de variável complexa. Mostre que se

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( (n+1) \left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{f^{(n+1)}(z_0)} \right| \right)$$

existir e for finito, então  $f$  tem uma singularidade não removível num ponto  $z$  tal que  $|z - z_0| = L$ .

45. Seja  $f(z) = \frac{z \operatorname{sen}(z)}{\cos(z) - 1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k (z - 4i)^{k-1}}$ , e  $D(f)$  o seu domínio de definição.

(a) Determine o desenvolvimento em série de Taylor da função  $z \operatorname{sen}(z)$  em potências de  $z - 2\pi$ .

(b) Determine o interior da região de convergência da série  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k (z - 4i)^{k-1}}$ .

(c) Classifique, justificando, as singularidades de  $f$  e determine os respectivos resíduos.

(d) Calcule os valores possíveis de  $\oint_{\Gamma} f(z) dz$ , onde  $\Gamma$  é uma curva simples, fechada e seccionalmente regular, contida na região

$$\{z \in \mathbb{C} : -3\pi < \operatorname{Re}(z) < 3\pi\} \cap D(f)$$

e tal que os pontos  $\pm 2\pi$  estão contidos na região delimitada por  $\Gamma$ .

46. Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais, indicando os intervalos de definição das funções.

(a)  $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$ .

(b)  $\frac{dy}{dt} + \cos t y = 0$ .

(c)  $\frac{dy}{dt} - \sin t y = e^{-\cos t}$ .

47. Determine a solução do seguintes problemas de valor inicial, indicando os intervalos máximos de definição:

$$(a) \begin{cases} \frac{dy}{dt} + \sqrt{1-t^2} y = 0 \\ y(0) = e^5 . \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} L \frac{di}{dt} + Ri = V \sin t \\ i(0) = 0 . \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} \frac{dy}{dt} + y = g(t) \\ y(0) = 0 , \end{cases} \quad , \text{ onde } g(t) = \begin{cases} e^{-(t-1)} & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{se } t > 1 . \end{cases}$$

48. Determine a solução geral da seguinte equação diferencial:

$$(1+t) \frac{dy}{dt} + \frac{y}{2} = (1+t)^{\frac{5}{2}} .$$

49. Numa substância radioactiva, o fenómeno de decaimento é aleatório: todos os núcleos atómicos têm a mesma probabilidade  $P$  de decaimento por unidade de tempo, e núcleos distintos comportam-se independentemente.

Suponha que em  $t = 0$  existem  $N_0$  núcleos dessa substância. Determine quantos núcleos  $N(t)$  existirão no instante  $t$ . (Sug.: a probabilidade é, neste caso, o mesmo que a frequência relativa).

50. Dada uma equação diferencial  $\frac{dy}{dt} + a(t)y = f(t)$  com  $a(t)$  e  $f(t)$  contínuas em  $\mathbb{R}$ ,  $a(t) \geq c > 0$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$ , mostre que todas as soluções tendem para zero quando  $t$  tende para infinito.

## Semana 6

51. O modelo mais simples para evaporação de uma gota de água esférica é supor que a diminuição de volume da gota se processa a uma taxa proporcional à sua superfície.

- (a) Qual o tempo necessário para que uma gota de raio  $R_0$  se evapore completamente?
- (b) Se supusermos que a taxa de diminuição de volume da gota é proporcional ao *quadrado* da sua superfície, quanto tempo demora uma gota de raio  $R_0$  a evaporar-se completamente?

52. Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais:

$$(a) (1+t^2) \frac{dy}{dt} = 1+y^2 \quad (\text{sugestão: } \tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}).$$

$$(b) \frac{dy}{dt} - y^2 = 1+t+ty^2$$

53. Nas alíneas seguintes determine a solução do problema de Cauchy e o intervalo de existência de cada solução :

$$(a) \cos y \frac{dy}{dt} = \frac{-t \sin y}{1+t^2}, \quad y(1) = \frac{\pi}{4}.$$

$$(b) \frac{dy}{dt} = \frac{2t}{y - yt^2}, \quad y(2) = 3.$$

54. Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} y(t)y'(t) = t \\ y(1) = \alpha \end{cases}$$

e diga para que valores de  $\alpha$  é que a solução está definida para todo o  $t \in \mathbb{R}$ .

55. Determine a constante  $\alpha$  para a qual a equação diferencial seguinte é exacta e resolva-a:

$$ty(y + \alpha e^{\alpha t^2 y}) + t^2(y + e^{\alpha t^2 y}) \frac{dy}{dt} = 0.$$

56. Determine a solução geral da seguinte equação diferencial:

$$y \sinh(ty) + \sinh(y) + t(\sinh(ty) + \cosh(y)) \frac{dy}{dt} = 0.$$

57. Resolva o seguinte problema de valor inicial e determine o intervalo de definição da solução:

$$\begin{cases} y \cos t + 2(y^2 + \sin t) \frac{dy}{dt} = 0 \\ y(0) = \sqrt[4]{2}. \end{cases}$$

58. Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} 4yt + 2t + 2t^3 + 2t \sin y + (2 + \cos y) \frac{dy}{dt} = 0 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Determine uma equação que define implicitamente a solução  $y(t)$  e mostre que o intervalo de definição desta solução é  $\mathbb{R}$ .

59. Determine a solução dos seguintes problemas de valor inicial indicando o intervalo máximo onde essa solução está definida.

(a)  $ty^2 + 1 + 2t^2yy' = 0, \quad y(1) = 2.$

(b)  $y - 2t^2 + [2ty + t \log(t)]y' = 0, \quad y(1) = 2.$

60. A equação diferencial

$$\cosh y + (e^{-t} + e^y) \frac{dy}{dt} = 0$$

admite um factor de integração da forma  $\mu(t + y)$ , ou seja, um factor  $\mu$  que só depende da soma das variáveis  $t + y$ . Determine-o e dê a solução da equação com  $y(0) = 0$ .

**Sugestão:** A equação diferencial que  $\mu = \mu(t+y)$  satisfaz pode ser escrita em termos de uma só variável  $v = t + y$ .

### Semana 7

61. Resolva a equação  $y' + y = e^t y^2$ . (Sugestão: faça a mudança de variável  $y = 1/u$ )

62. Determine a solução geral da equação  $ty' = (1 + t)y + y^2$ . (Sugestão: faça a mudança de variável  $y = tv$ )

63. Suponha que temos uma equação diferencial da forma ( $a \neq 0$ )

$$\frac{dy}{dt} = f(ay + bt + c) ,$$

como, por exemplo, a equação  $\frac{dy}{dt} = \text{sen}(y + 2t + 3)$ . Como o segundo membro da equação depende apenas de  $ay + bt + c$ , é natural fazer a substituição  $v = ay + bt + c$ , ou seja,  $y = \frac{v - bt - c}{a}$ .

Mostre que esta substituição transforma  $\frac{dy}{dt} = f(ay + bt + c)$  na equação equivalente

$$\frac{dv}{dt} = af(v) + b ,$$

que é separável. Aproveite este resultado para resolver a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = -((t + y)^2 + 1) \arctan(t + y) - 1 .$$

64. Toda a equação diferencial da forma  $\dot{y} = f(y)$  é separável. Estas equações diferenciais de 1.<sup>a</sup> ordem em que o tempo não aparece explicitamente dizem-se *autónomas*. Todas elas podem, em princípio, ser resolvidas. Suponha agora que temos uma equação diferencial da forma

$$\frac{dy}{dt} = f\left(\frac{y}{t}\right),$$

como por exemplo  $\frac{dy}{dt} = \sin\left(\frac{y}{t}\right)$ . Estas equações dizem-se *homogéneas*. O facto de o membro esquerdo da equação depender apenas do quociente  $\frac{y}{t}$  sugere que se faça a substituição  $v = \frac{y}{t}$ , ou seja  $y = vt$ .

(a) Mostre que esta substituição transforma  $\frac{dy}{dt} = f\left(\frac{y}{t}\right)$  na equação equivalente

$$t \frac{dv}{dt} + v = f(v)$$

que é separável.

(b) Determine a solução geral da equação  $\frac{dy}{dt} = 2\frac{y}{t} + \left(\frac{y}{t}\right)^2$ .

(c) Determine a solução da equação da alínea anterior que satisfaz  $y(1) = -1$ .

65. Determine a solução geral das seguintes equações :

(a)  $2ty \frac{dy}{dt} = 3y^2 - t^2$ .

(b)  $\frac{dy}{dt} = \frac{t+y}{t-y}$ .

**Sugestão:** Exercício 64

66. Chama-se *equação de Bernoulli* a uma equação diferencial da forma

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = b(t)y^n.$$

Determine a solução geral desta equação. Sugestão : divida ambos os lados por  $y^n$  e mediante a mudança de variáveis  $u = y^{1-n}$  transforme-a numa equação linear em  $u$ .

67. Para cada uma das seguintes equações diferenciais, esboce o campo de direcções e trace os respectivos tipos de soluções .

$$(a) y' = t^2 - y^2 ,$$

$$(b) y' = \frac{t y}{1 + t^2} ,$$

$$(c) y' = (2 - y)(y - 1),$$

$$(d) y' = y(1 - y^2) ,$$

$$(e) y' = \sin(y - t) ,$$

$$(f) y' = \frac{y + t}{y - t} ,$$

68. Mostre que existe uma solução de classe  $C^1$  para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = 6t\sqrt[3]{y^2} \\ y(0) = 0 , \end{cases}$$

diferente da solução  $y(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$ . Explique porque é que isto não contradiz o teorema de Picard.

69. Mostre que o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{3y^2 + \sqrt[3]{(t+1)^2}} \\ y(0) = 1 , \end{cases}$$

tem uma única solução  $y(t)$ , definida para  $t \in [0, +\infty[$ , e calcule  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$ .

**Sugestão:** Não tente resolver a equação diferencial. Considere a função  $u(t)$  definida por

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{1}{3u^2} \\ u(0) = 1 . \end{cases}$$

Uma vez determinada a função  $u(t)$ , mostre que

$$\frac{dy}{dt} \geq \frac{1}{3(u(t))^2 + \sqrt[3]{(t+1)^2}} ,$$

e integre esta relação entre 0 e  $t$ .

70. Considere a equação diferencial

$$\begin{cases} y' = -yg(t, y) + e^{-t} \\ y(0) = y_0 > 0, \end{cases}$$

onde  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow [1, +\infty[$  tem derivadas parciais contínuas para todo o  $(t, y) \in \mathbb{R}^2$ .

(a) Mostre que a solução da equação dada está definida para todo o  $t$  positivo.

(b) O que pode dizer quanto ao limite de  $y$  quando  $t \rightarrow +\infty$ ?

## Semana 8

71. Considere as seguintes matrizes:

$$(a) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(b) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Para cada uma das matrizes  $\mathbf{A}$  acima indicadas, responda às seguintes questões:

- (a) Calcule  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}^2$ ,  $\mathbf{A}^3$  e  $\mathbf{A}^4$ .
- (b) Intua uma fórmula para  $\mathbf{A}^n$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , e demonstre-a pelo princípio de indução matemática.
- (c) Calcule  $e^{t\mathbf{A}}$  através da definição (i.e.  $e^{t\mathbf{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathbf{A}^n$ ).

72. Sejam  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{S}$  duas matrizes  $n \times n$ , com  $\det \mathbf{S} \neq 0$ . Mostre que

- (a)  $\text{tr} \mathbf{SAS}^{-1} = \text{tr} \mathbf{A}$ .
- (b)  $\det \mathbf{SAS}^{-1} = \det \mathbf{A}$ .
- (c)  $\det e^{t\mathbf{A}} = e^{t \text{tr} \mathbf{A}}$ .

73. Considere as seguintes matrizes:

$$(a) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(b) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(c) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(d) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(e) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(f) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Para cada uma das matrizes  $\mathbf{A}$  acima indicadas, responda às seguintes questões:

- (a) Calcule  $e^{t\mathbf{A}}$ .
- (b) Resolva o problema de valor inicial,

$$\dot{u} = \mathbf{A}u, \quad u(0) = (1, 1, 1).$$

74. Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Determine  $e^{t\mathbf{A}}$  e resolva o problema de valor inicial  $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x}(1) = [1 \ 0 \ 0]^T$ .

75. Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Determine  $e^{\mathbf{A}t}$  e resolva o problema de valor inicial  $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x}(\pi/2) = [1 \ 1 \ 0]^T$ .

76. Determine a solução geral do seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} x' = 14x - 10y + 1 \\ y' = 10x - 2y + 2 \end{cases}$$

**Sugestão:** Determine primeiro uma solução particular constante.

77. Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x' = -2x + 4y + t^6 \\ y' = -x + 2y + t^5 \end{cases}, \quad x(0) = y(0) = 1.$$

78. Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x' = 2x - 2y + t \\ y' = x - y + e^t \end{cases}, \quad x(0) = y(0) = 0.$$

79. Determine uma matriz  $2 \times 2$ ,  $\mathbf{A}$ , tal que uma das soluções de  $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$  seja

$$\mathbf{x}(t) = (e^{2t} - 2e^{-t}, e^{2t} + 4e^{-t}).$$

A solução encontrada é única?

80. Determine uma matriz  $4 \times 4$ ,  $\mathbf{A}$ , tal que uma das soluções de  $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$  seja

$$\mathbf{x}(t) = (\sin 2t, \cos 2t, (t+1)e^t, (t-1)e^t).$$

A solução encontrada é única?