

# Análise Matemática IV

## Problemas para as Aulas Práticas

(9<sup>a</sup> a 12<sup>a</sup> semana)

Cursos: **Todos**

1<sup>o</sup> semestre de 2000/01

### Semana 9

81. Resolva os sistemas

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}$$

**Sugestão:** Reduza cada sistema a uma equação escalar em apenas uma variável.

82. Determine uma equação diferencial de 2.<sup>a</sup> ordem que tenha como soluções a família dada:

- (a)  $y(t) = At + Bt^2$ ,
- (b)  $y(t) = (A + Bt)e^t$ .

83. Considere a equação diferencial  $y'' - 2y' + 2y = 0$ .

- (a) Determine a solução geral da equação .
- (b) Esboce as soluções que satisfazem  $y(0) = 0$ .
- (c) Reduza a equação a um sistema de primeira ordem.

84. Determine a solução geral das equações diferenciais:

- (a)  $y'' + y' - 2y = e^t + \cos(t)$
- (b)  $y'' - 2y' + y = t$

85. Determine a solução geral das equações diferenciais:

(a)  $y'' + y = \cos(t)$

(b)  $y''' - y'' + y' - 1 = 0$

86. Determine a solução geral das equações diferenciais:

(a)  $y''' - 4y' = 8t - 16\text{sen}(2t)$

(b)  $y'' - 3y' + 2y = te^{2t}$

87. Considere uma equação diferencial linear homogénea de coeficientes constantes e com a menor ordem possível que admite as soluções  $t$  e  $\text{sen}(2t)$ . Qual a solução geral dessa equação?

88. Resolva os seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y''' - 4\pi y'' + 3\pi^2 y' = 10\pi^3 \cos(\pi t), \\ y(0) = 4, y'(0) = 4\pi, y''(0) = 7\pi^2. \end{cases}$$

89. Resolva os seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'' - 3\pi y' + 2\pi^2 y = \pi^2 e^{\pi t}, \\ y(0) = 1, y'(0) = \pi. \end{cases}$$

90. Considere a seguinte equação diferencial linear:

$$(e^t + 1)y'' - y' - \frac{e^{2t}}{e^t + 1}y = 2e^t.$$

(a) Verifique que  $y = e^t + 1$  e  $y = \frac{1}{e^t + 1}$  são duas soluções linearmente independentes da equação homogénea associada.

(b) Resolva a equação (não homogénea) com as condições iniciais:

$$y(0) = y'(0) = 0$$

**Sugestão:** Divida a equação por  $e^t + 1$ .

### Semana 10

91. Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dt^2} = -2 \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 \tan y, \\ y(1) = \frac{\pi}{4}, \frac{dy}{dt}(1) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

**Sugestão:** Determine  $v(y)$  tal que  $\dot{y} = v(y)$ .

**Determine a solução geral de:**

92.  $y'' + t(y')^2 = 0$ .

93.  $2t^2y'' + (y')^3 = 2ty'$ .

94.  $yy'' + (y')^2 = 0$ .

95.  $yy'' = 2(y')^2$ .

**Determine os valores de  $\lambda$  para os quais os seguintes problemas de valores fronteira têm soluções não triviais:**

96.  $y'' - 2y' + (1 + \lambda)y = 0$ ;  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 0$ .

97.  $y'' + \lambda y = 0$ ;  $y(0) = y(2\pi)$ ,  $y'(0) = y'(2\pi)$ .

98. a) Recorrendo ao método de separação de variáveis, determine as soluções para  $t \geq 0$  e para  $x \in [0, 1]$  de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \\ u(0, t) = 0, u(1, t) = \text{sen}1 \end{cases}$$

(satisfazendo a equação diferencial para  $x \in ]0, 1[$ ).

b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial

$$u(x, 0) = 3 \text{sen}(2\pi x) - 7 \text{sen}(4\pi x) + \text{sen}(x) .$$

99. Determine a solução dos seguinte problema de valor inicial e condição na fronteira (PVIF):

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad x \in (0, \pi), \quad \text{com} \begin{cases} u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = \text{sen}(x) - 2 \text{sen}(5x). \end{cases}$$

100. Determine a solução dos seguinte problema de valor inicial e condição na fronteira (PVIF):

$$u_t = u_{xx} - u, \quad x \in (0, L), \quad \text{com} \begin{cases} u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0 \\ u(x, 0) = \cos(3\pi x/L). \end{cases}$$

### Semana 11

101. Calcule a série de Fourier da função  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 \leq x \leq 0, \\ +1 & \text{se } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

102. Determine a série de Fourier da função  $f(x) = x$ , no intervalo  $] -1, 1[$ .

103. Determine a série de Fourier da função  $g(x) = L - |x|$ , no intervalo  $[-L, L]$ . Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

104. Determine a série de Fourier da função  $h(x) = x^2$ , no intervalo  $x \in [-L, L]$ . Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

105. Calcule a série de Fourier da onda sinusoidal retificada, isto é, de

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } \operatorname{sen} x > 0 \\ 0 & \text{se } \operatorname{sen} x \leq 0 \end{cases}$$

106. a) Calcule, utilizando o Teorema dos Resíduos, os integrais

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{inx}}{5 + 4 \cos x} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

b) Deduza, da alínea anterior, os valores de

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nx}{5 + 4 \cos x} dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} nx}{5 + 4 \cos x} dx.$$

c) Diga, justificando, qual o valor da soma da série  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$  para cada  $x \in [-\pi, \pi]$ .

107. a) Sejam  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . O que pode dizer da paridade da função  $f \circ g$  nos seguintes casos:

(1)  $f$  par,  $g$  ímpar    (2)  $f$  ímpar,  $g$  ímpar    (3)  $f$  par,  $g$  par    (4)  $f$  ímpar,  $g$  par

b) Mostre que, se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  for uma função ímpar diferenciável, então  $f'$  é par. Será que se  $f'$  for par, uma sua primitiva é necessariamente ímpar?

108. Desenvolva a função definida no intervalo  $[0, 1]$  por  $f(x) = x$  numa série de cossenos e indique para que valores converge (pontualmente) a série obtida.

109. Desenvolva a função definida no intervalo  $[0, 1]$  por  $f(x) = 1$  numa série de senos e indique para que valores converge (pontualmente) a série obtida.

110. Seja  $f$  a função definida no intervalo  $(0, \pi)$  por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(2x), & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & , \quad \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$$

- (a) Determine a série de senos da função  $f$ .  
 (b) Resolva a equação

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in ]0, \pi[ \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

### Semana 12

111. Considere a equação de propagação do calor  $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ . (\*)

- (a) Mostre que esta equação possui uma solução estacionária (isto é, que não depende do tempo) da forma  $u(x) = Ax + B$ .  
 (b) Determine a solução estacionária para o problema correspondente a uma barra situada entre os pontos  $x = 0$  e  $x = L$ , em que se fixam as temperaturas  $u(0, t) = T_1$ ,  $u(L, t) = T_2$ .  
 (c) Resolva a equação (\*) para  $0 \leq x \leq 1$  e para as condições iniciais e de fronteira
- $$\begin{cases} u(0, t) = 20 \\ u(1, t) = 60 \\ u(x, 0) = 75. \end{cases}$$

112. Seja a função  $f$  definida no intervalo  $(0, \pi)$  por  $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ .

- (a) Determine a série de Fourier de cossenos da função  $f$ .  
 (b) Diga, justificando, qual o valor da soma da série de Fourier da alínea anterior para cada  $x$  no intervalo  $[-\pi, \pi]$ .  
 (c) Resolva a equação

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2u, & x \in ]0, \pi[ \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

113. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação das ondas

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0 \\ u(0, x) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 1 \end{cases}$$

para  $t \geq 0$  e para  $x \in [0, 1]$ , (satisfazendo a equação diferencial para  $x \in ]0, 1[$ ) e onde  $c$  é um parâmetro real.

114. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação de Laplace

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) = \cos(2\pi x) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) = \cos(2\pi y) \end{cases}$$

para  $x, y \in [0, 1]$ .

115. a) Recorrendo ao método de separação de variáveis, determine as soluções para  $t \geq 0$  e para  $x \in [0, \pi]$  de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

(satisfazendo a equação diferencial para  $x \in ]0, \pi[$ ).

- b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial

$$u(x, 0) = (\pi - x)x .$$

116. Seja  $f$  a função definida no intervalo  $]0, 2\pi[$  por  $f(x) = x$ .

(a) Determine a série de cossenos da função  $f$ .

(b) Resolva a equação

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - tu, \quad x \in (0, 2\pi) \\ u_x(0, t) = u_x(2\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

117. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação das ondas

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ u(x, 0, t) = x, \quad u(x, 1, t) = x \\ u(0, y, t) = 0, \quad u(1, y, t) = 1 \\ u(x, y, 0) = x \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = \cos(2\pi(x - y)) - \cos(2\pi(x + y)) \end{cases}$$

para  $x, y \in [0, 1]$  e  $t \in \mathbb{R}$ .