Geometria Diferencial

Ficha 5

A entregar até até à aula teórica de 9/12/2004

1. Calcule o grau da aplicação $f : \mathbb{P}^d \to \mathbb{P}^d$ dada por

$$f\left(\left[x^0, \ldots, x^d\right]\right) = \left[(x^0)^k, \ldots, (x^d)^k\right],$$

onde $k \in \mathbb{N}$ e d é ímpar. Calcule ainda o grau da aplicação $g : \mathbb{P}^d(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^d(\mathbb{C})$ dada pela mesma expressão (com d qualquer).

2. Seja $E = \mathbb{P}^{d+1} \setminus \{[0, \ldots, 0, 1]\}$, e $\pi : E \to \mathbb{P}^d$ a aplicação dada por

$$\pi\left(\left[x^0, \ldots, x^{d+1}\right]\right) = \left[x^0, \ldots, x^d\right].$$

Mostre que as parametrizações $\phi_i^{-1} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \to E$ dadas por

$$\phi_i^{-1}\left(u^1, \ldots, u^d, t\right) = \left[u^1, \ldots, u^{i-1}, 1, u^i, \ldots, u^d, t\right].$$

definem um fibrado de linha $\xi = (\pi, E, \mathbb{P}^d)$. Mostre ainda que este fibrado é isomorfo ao fibrado tautológico γ_d^1 sobre $\mathbb{P}^d$. Conclua que γ_d^1 não é o fibrado trivial.

3. Mostre que o pull-back do fibrado tautológico γ_d^1 pela aplicação $\psi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^d$ dada por

$$\psi\left(\left[x^0, x^1\right]\right) = \left[(x^0)^d, (x^0)^{d-1}x^1, \ldots, x^0(x^1)^{d-1}, (x^1)^d\right]$$

é isomorfo a $\gamma_1^1 \otimes \ldots \otimes \gamma_1^1$ (produto tensorial com d factores).

4. Seja $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado vectorial de rank r e $U \subset M$ um aberto trivializante. Se $\{s_1, \dots, s_r\}, \{s'_1, \dots, s'_r\} \subset \Gamma_U(E)$ são dois referenciais locais em U, tem-se

$$s' = sA,$$

onde s, s' são as matrizes linha (formais) $s = [s_1 \dots s_r]$, $s' = [s'_1 \dots s'_r]$ e $A \in C^\infty(U, GL(r))$ é a matriz de mudança de base. Sejam $\omega = \left[\omega_a^{\ b}\right]^t$ e $\omega' = \left[{\omega'}_a^{\ b}\right]^t$ as **transpostas** das matrizes das formas de conexão associada a estes referenciais. Tem-se portanto

$$\nabla_X s = s\omega(X), \quad \nabla_X s' = s'\omega'(X)$$

para todo o $X \in \mathcal{X}(U)$.

(a) Mostre que
$$\omega' = A^{-1}\omega A + A^{-1}dA.$$

(b) Mostre que as **transpostas** das matrizes das formas de curvatura Ω, Ω' associadas aos dois referenciais satisfazem
$$\Omega' = A^{-1}\Omega A.$$

(c) O aberto U é também um aberto trivializante para o **fibrado dos referenciais** (π, F, M): o referencial s determina a aplicação trivializante

$$\phi(v_1, \dots, v_r) = (p, B) \in M \times GL(r),$$

onde $\{v_1, \dots, v_r\}$ é uma base de E_p e $B \in GL(r)$ é a matriz de mudança de base de $\{s_1(p), \dots, s_r(p)\}$ para $\{v_1, \dots, v_r\}$ (ou seja, $v = s(p)B$). Em $\pi^{-1}(U)$ definimos a matriz de 1-formas
$$\tilde{\omega} = B^{-1}\left(\pi^*\omega\right)B + B^{-1}dB.$$

Mostre que $\tilde{\omega}$ não depende da escolha do referencial s, e portanto define uma matriz de 1-formas globais em F.

(d) Em $\pi^{-1}(U)$ definimos a matriz de 2-formas

$$\tilde{\Omega} = B^{-1}\left(\pi^*\Omega\right)B.$$

Mostre que $\tilde{\Omega}$ não depende da escolha do referencial s, e portanto define uma matriz de 2-forma globais em F.

(e) Mostre que
$$\tilde{\Omega} = d\tilde{\omega} + \tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega}.$$

(f) Mostre que os núcleo das 1-formas da matriz $\tilde{\omega}$ definem uma distribuição de dimensão d em F, e que as curvas em F tangentes a esta distribuição correspondem a referenciais paralelamente transportados ao longo da sua projecção em M. Mostre ainda que esta distribuição é integrável *sse* a conexão ∇ é plana.

5. Mantendo as convenções do exercício anterior, seja agora $\xi = TM$. Representamos o co-referencial dual $\{\sigma^1, \ldots, \sigma^d\} \subset \Omega^1(U)$ de s como uma matriz coluna (formal) σ. Podemos portanto escrever $\sigma(s) = I$, onde I é a matriz identidade $d \times d$. Definimos a matriz coluna τ das **formas de torção** como sendo a matriz cujas componentes são as formas $T^i \in \Omega^2(U)$ dadas por
$$T^i(X, Y) = \sigma^i(T(X, Y)).$$

   (a) Mostre que
   $$\tau = d\sigma + \omega \wedge \sigma.$$

   (b) Se s' é outro referencial local, mostre que
   $$\sigma' = A^{-1}\sigma,$$
   e que portanto
   $$\tau' = A^{-1}\tau.$$

   (c) Definimos no fibrado dos referenciais as matrizes de 1-formas locais
   $$\tilde{\sigma} = B^{-1}\sigma, \quad \tilde{\tau} = B^{-1}\tau.$$
   Mostre que estas matrizes de formas se encontram globalmente definidas e que
   $$\tilde{\tau} = d\tilde{\sigma} + \tilde{\omega} \wedge \tilde{\sigma}.$$