# Teorias de Gauge e Conexões em Fibrados Vectoriais

## 1 Relatividade e Electromagnetismo

A Teoria da Relatividade Especial identifica o espaço-tempo com $\mathbb{R}^4$ (com coordenadas Cartesianas $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z)$, onde $t$ representa o tempo) munido da métrica pseudo-Riemanniana

$$g = -dt \otimes dt + dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz$$

(**métrica de Minkowski**). As histórias de partículas materiais correspondem a curvas $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ com $g(\dot{c}, \dot{c}) < 0$. Reparametrizando a curva se necessário, podemos assumir que $g(\dot{c}, \dot{c}) = -1$, caso em que o parâmetro $\tau$ da curva se diz o **tempo próprio** da partícula.

O **campo electromagnético** é uma 2-forma $F \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$. A equação do movimento de uma partícula de massa $m$ e carga $e$ no campo electromagnético é dada pela **lei de Lorentz**

$$m\ddot{c}^\sharp = -e\,(\dot{c} \lrcorner F)\,,$$

onde $\sharp$ designa a habitual correspondência entre vectores e covectores determinada por $g$, $\lrcorner$ designa a operação de contracção e o parâmetro é o tempo próprio $\tau$. O campo electromagnético é suposto satisfazer as **equações de Maxwell**, que no vazio se escrevem

$$\begin{aligned} dF &= 0; \\ d^*F &= 0, \end{aligned}$$

onde $*$ é o operador estrela de Hodge determinado por $g$. Este é definido da seguinte forma: se $\{\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4\}$ é um co-referencial ortonormado positivamente orientado então

$$^*\alpha^1 \wedge \ldots \wedge \alpha^k = g(\alpha^1, \alpha^1) \, \ldots \, g(\alpha^k, \alpha^k)\alpha^{k+1} \wedge \ldots \wedge \alpha^4.$$

**Exercício 1.1** *Verifique que a lei de Lorentz é consistente com $g(\dot{c}, \dot{c})$ ser constante.*

**Exercício 1.2** *É usual escrever (em unidades nas quais a permitividade eléctrica do vácuo é dada por $\varepsilon_0 = 1$)*

$$F = E^1 dx \wedge dt + E^2 dy \wedge dt + E^3 dz \wedge dt + B^1 dy \wedge dz + B^2 dz \wedge dx + B^3 dx \wedge dy,$$

*onde*

$$\mathbf{E} = (E^1, E^2, E^3)$$

*é o* **campo eléctrico** *e*

$$\mathbf{B} = (B^1, B^2, B^3)$$

*é o* **campo magnético**. *Mostre que em termos destes campo a lei de Lorentz se escreve*

$$m\frac{d^2\mathbf{x}}{d\tau^2} = e\frac{dt}{d\tau}\mathbf{E} + e\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \times \mathbf{B},$$

*onde $\mathbf{x} = (x, y, z)$ é o vector posição da partícula. Mostre ainda que as equações de Maxwell $dF = 0$ se escrevem*

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0; \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \end{aligned}$$

*enquanto que as equações de Maxwell $d^*F = 0$ se escrevem*

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0; \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned}$$

**Exercício 1.3** *Verifique que os seguintes campos electromagnéticos são soluções das equações de Maxwell:*

1. *Campo criado por uma partícula de carga $e$:*

$$\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{x}}{4\pi |\mathbf{x}|^3}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{0}.$$

2. *Campo criado por uma corrente eléctrica de intensidade $I$ ao longo do eixo dos $zz$:*

$$\mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{B} = \frac{I}{2\pi\,(x^2 + y^2)}(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$$

*(representamos por $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ os versores dos eixos coordenados).*

3. *Onda plana propagando-se ao longo do eixo dos $xx$:*

$$\mathbf{E} = f(x - t)\,\mathbf{j}, \quad \mathbf{B} = f(x - t)\,\mathbf{k}$$

*(com $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^1$ qualquer).*

# 2 Electromagnetismo como uma Teoria de Gauge

O campo electromagnético pode ser visto como a curvatura de uma conexão $\nabla$ no fibrado de linha complexo trivial $L = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{C}$, compatível com o produto interno Hermiteano canónico nas fibras. Efectivamente, a matriz da forma de conexão numa base ortonormada $s \in \Gamma(L)$ deverá ser anti-Hermiteana,

$$\omega^1_1 = iA$$

com $A \in \Omega^1(\mathbb{R}^4)$, pelo que a matriz da forma de curvatura será

$$\Omega^1_1 = d\omega^1_1 + \omega^1_1 \wedge \omega^1_1 = d\omega^1_1 = idA = iF$$

com $F \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$. O facto de que $F = dA$ garante que $F$ satisfaz a primeira equação de Maxwell; esta é, aliás, equivalente à identidade de Bianchi $d_\nabla R = 0$, que neste caso se escreve

$$d\Omega^1_1 - \Omega^1_1 \wedge \omega^1_1 + \omega^1_1 \wedge \Omega^1_1 = 0 \Leftrightarrow d\Omega^1_1 = 0 \Leftrightarrow dF = 0.$$

Note que a lei de transformação da matriz da forma de curvatura garante que $F$ não depende da escolha de base ortonormada. Por outro lado, uma mudança de base ortonormada (dita uma **transformação de gauge**) com matriz de mudança de base $e^{i\chi}$ (onde $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$) faz com que a 1-forma $A$ mude por adição de $d\chi$:

$$\omega'^1_1 = e^{-i\chi}\omega^1_1 e^{i\chi} + e^{-i\chi}de^{i\chi} = \omega^1_1 + id\chi \Rightarrow A' = A + d\chi.$$

O operador estrela de Hodge pode, claro está, ser estendido às formas diferenciais com valores nas secções de um fibrado, mediante

$$^*(\omega \otimes s) = (^*\omega) \otimes s.$$

Deste modo, as equações de Maxwell $d^*F$ podem ser reescritas como

$$d_\nabla {}^*R = 0.$$

Para escrever a lei de Lorentz nesta linguagem necessitamos de introduzir o **estado interno** da partícula. Este é dado por uma secção $\psi$ de $L \otimes L^*$ ao longo da história $c$ da partícula, de modo a que $\psi(R)$ é uma 2-forma ao longo de $c$. Se $\sigma \in \Gamma(L^*)$ é o co-referencial dual de $s$, tem-se

$$\psi(\tau) = \alpha(\tau) s \otimes \sigma,$$

e portanto

$$\frac{D\psi}{D\tau} = \left(\frac{d\alpha}{d\tau} + \alpha\omega^1_1(\dot{c}) - \alpha\omega^1_1(\dot{c})\right) s \otimes \sigma = \frac{d\alpha}{d\tau} s \otimes \sigma.$$

Deste modo, tomando $\alpha(0) = -ie$ e exigindo que o estado interno satisfaça

$$\frac{D\psi}{D\tau} = 0$$

obtemos $\alpha(\tau) = -ie$ e consequentemente

$$\psi(R) = (-ie\ s \otimes \sigma)\,(iF\ \sigma \otimes s) = eF.$$

Portanto a lei de Lorentz pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} &m\ddot{c}^\sharp = -\dot{c} \lrcorner \psi(R); \\ &\frac{D\psi}{D\tau} = 0 \end{aligned}$$

(**equação de Wong**). A escolha do estado interno num dado instante equivale a fixar a carga da partícula.

**Exercício 2.1** *A equação de Maxwell $dF = 0$ implica que $F = dA$ para alguma 1-forma $A \in \Omega^1(\mathbb{R}^4)$ (dita um* **potencial vector***). Mostre que se escrevermos $A = -\phi dt + A^1 dx + A^2 dy + A^3 dz$ se tem*

$$\begin{aligned} &\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}; \\ &\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \end{aligned}$$

*onde $\mathbf{A} = (A^1, A^2, A^3)$.*

**Exercício 2.2** *Mostre que uma trasformação de gauge corresponde à substituição*

$$\phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t};$$
$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} \chi.$$

*Verifique que esta substituição deixa os campos* $\mathbf{E}$ *e* $\mathbf{B}$ *invariantes.*

**Exercício 2.3** *Use o facto de que a equação de onda com uma dada fonte* $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$

$$\operatorname{lap} \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = \rho$$

*possui sempre solução para mostrar que é sempre possível encontrar um potencial vector satisfazendo*

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

(**gauge de Lorentz**). *Mostre que para este potencial vector as equações e Maxwell* $d^*F = 0$ *se reduzem às equações de onda*

$$\operatorname{lap} \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0;$$
$$\operatorname{lap} \mathbf{A} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0.$$

# 3 Formalismo Hamiltoniano

Recorde que um **Lagrangeano** é uma função $L : T\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$. As **curvas de Euler-Lagrange** associadas a um Lagrangeano $L$ são as soluções do sistema de EDOs

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0.$$

Mostra-se facilmente que a lei de Lorentz pode ser obtida a partir do Lagrangeano

$$L = \frac{m}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + e A_\mu \dot{x}^\mu = \frac{m}{2} g(\dot{c}, \dot{c}) + eA(\dot{c}),$$

onde estamos a usar a **convenção de Einstein** de assumir a existência de uma soma sobre índices repetidos. A **transformação de Legendre** é o morfismo de fibrados $T\mathbb{R}^4 \to T^*\mathbb{R}^4$ que associa ao vector tangente $\dot{c}$ o **covector momento** $p$ definido pelas suas coordenadas

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = m g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu + e A_\mu,$$

ou seja,

$$p = m\dot{c}^\sharp + eA.$$

O **Hamiltoniano** é a função $H : T^*\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dada por

$$H = p(\dot{c}) - L.$$

No caso presente, facilmente se obtém que

$$H = \frac{1}{2m} g(p - eA, p - eA).$$

**Exercício 3.1** *Mostre que a lei de Lorentz pode ser obtida do Lagrangeano*

$$L = \frac{m}{2} g(\dot{c}, \dot{c}) + eA(\dot{c}).$$

**Exercício 3.2** *Mostre que uma transformação de gauge altera o Lagrangeano para*

$$L' = L + e\, d\chi(\dot{c}).$$

*Mostre que $L$ e $L'$ determinam as mesmas equações do movimento.*

**Exercício 3.3** *Mostre que o Hamiltoniano correspondente ao Lagrangeano acima é*

$$H = p(\dot{c}) - L = \frac{1}{2m} g(p - eA, p - eA).$$

**Exercício 3.4** *Mostre que as equações de Euler-Lagrange são equivalentes às* **equações de Hamilton**

$$\begin{cases} \dot{x}^\mu = \frac{\partial H}{\partial p_\mu} \\ \dot{p}_\mu = -\frac{\partial H}{\partial x^\mu} \end{cases}$$

*Note que estas equações definem um fluxo em $T^*\mathbb{R}^4$.*

# 4 Relações com Mecânica Quântica

Em Mecânica Quântica as partículas são descritas a partir de **funções de onda**, que satisfazem certas equações diferenciais parciais lineares. Estas equações, no caso da partícula livre, são obtidas escrevendo a relação entre a energia e o momento da partícula em questão e fazendo a substituição

$$p_\mu = -i\partial_\mu,$$

onde $p = m\dot{c} = (E, p^1, p^2, p^3)$ é o vector energia-momento da partícula (usamos unidades nas quais a constante de Planck satisfaz $\hbar = 1$). Assim, a relação clássica

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$$

fornece a **equação de Schrödinger**

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m} \operatorname{lap} \psi,$$

e a relação relativista

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$$

fornece a **equação de Klein-Gordon**

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \operatorname{lap} \psi - m^2 \psi,$$

que pode também ser escrita como

$$g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \psi - m^2 \psi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad {}^*d\, {}^*d\psi - m^2 \psi = 0.$$

Em ambos os casos, a função $\psi$ é uma função com valores em $\mathbb{C}$, podendo portanto ser vista como uma secção do fibrado $L$. A estrutura Hermiteana em $L$ permite então calcular $|\psi|^2$, que é interpretado como a densidade de probabilidade de num dado instante encontrar a partícula numa dada posição. Por outro lado, a introdução do campo electromagnético, que no formalismo Hamiltoniano corresponde a substituir $p$ por $p - eA$, é feita em Mecânica Quântica, por analogia, substituindo $\partial_\mu$ por $\partial_\mu - ieA_\mu$. Introduzindo em $L$ a conexão $\nabla$ compatível com a métrica Hermitiana cuja forma de conexão é

$$\omega_1^1 = -ieA$$

podemos então escrever a equação de Klein-Gordon para uma partícula de massa $m$ e carga $e$ como

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\psi - m^2\psi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad {}^*d_\nabla{}^*d_\nabla\psi - m^2\psi = 0.$$

Esta equação substitui simultaneamente a lei de Lorentz e a equação de evolução do estado interno. Apesar de no caso quântico a carga eléctrica estar codificada na conexão, as equações de Maxwell escrevem-se da mesma forma $d_\nabla R = d_\nabla{}^*R = 0$.

**Exercício 4.1** *Mostre que* ${}^*d\,{}^*d\psi = g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\psi$.

**Exercício 4.2** *Escreva a equação de Schrödinger para uma partícula de massa $m$ e carga $e$ no campo electromagnético.*

# 5 Teorias de Gauge Gerais

Podemos formular uma teoria de gauge geral considerando agora uma conexão $\nabla$ no fibrado vectorial complexo de rank $r$ trivial $E = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{C}^r$, compatível com o produto interno Hermiteano canónico nas fibras. Portanto a matriz da forma de conexão numa base ortonormada $\{s_1, \ldots, s_r\} \in \Gamma(E)$ deverá ser anti-Hermiteana, $\omega \in \mathfrak{u}(r)$. Nas teorias que encontram aplicação na física de partículas, exige-se ainda que esta conexão seja compatível com a orientação canónica $e_1 \wedge \ldots \wedge e_r$, i.e. $\omega \in \mathfrak{su}(r)$ [1].

A curvatura da conexão, que contém os campos de gauge, é suposta satisfazer, além da identidade de Bianchi $d_\nabla R = 0$, a **equação de Yang-Mills** $d_\nabla{}^*R = 0$. O análogo da lei de Lorentz é a **equação de Wong**, que se escreve

$$m\ddot{c}^\sharp = -\dot{c} \lrcorner \psi(R);$$
$$\frac{D\psi}{D\tau} = 0,$$

onde $\psi$ é uma secção de $E \otimes E^*$ ao longo da história $c$ da partícula, dita o seu **estado interno**, e desempenha o papel da carga. Quanticamente, a equação de Wong é substituida por uma equação de onda, por exemplo a **equação de Klein-Gordon**

$${}^*d_\nabla{}^*d_\nabla\psi - m^2\psi = 0,$$

[1] Especificamente, o grupo de estrutura é $SU(2)$ para a **força nuclear fraca** e $SU(3)$ para a **força nuclear forte**. A força fraca age sobre electrões, neutrinos e quarks, e é responsável por certos processos radioactivos, como por exemplo o decaimento do neutrão; a força forte age apenas sobre quarks, e é responsável pelo agrupamento destes em protões e neutrões, e pelo agrupamento destes últimos em núcleos estáveis. De notar que estas teorias descrevem processos que ocorrem a escalas muito pequenas, pelo que a equação de Wong, que descreve o limite clássico destas teorias, não tem qualquer utilidade neste contexto; a própria equação de Klein-Gordon não é utilizada directamente, mas sim a sua versão segundo-quantizada, de acordo com a Teoria Quântica de Campo.

onde a função de onda $\psi$ é uma secção de $E$.[2]

Por exemplo, para $r = 2$ (que foi o caso incialmente estudado por Yang e Mills), e usando a habitual identificação de $\mathfrak{su}(2)$ com os quaterniões puramente vectoriais, temos

$$\omega = A_1 \mathbf{i} + A_2 \mathbf{j} + A_3 \mathbf{k} = \mathbf{A}$$

com $A_1, A_2, A_3 \in \Omega^1(\mathbb{R}^4)$, donde

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega = d\mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathbf{A} = d\mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{F}$$

(onde as operações entre vectores de formas se devem efectuar usando o produto exterior entre as componentes, pelo que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A_1 \wedge A_1 + A_2 \wedge A_2 + A_3 \wedge A_3 = 0$). Esta equação implica a identidade de Bianchi, que nesta notação se escreve

$$d\mathbf{F} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{A} \times \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{F} \times \mathbf{A} = \mathbf{0} \Leftrightarrow d\mathbf{F} + 2\mathbf{A} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}.$$

A equação de Yang-Mills escreve-se

$$d^* \mathbf{F} + 2\mathbf{A} \times {}^*\mathbf{F} = \mathbf{0}.$$

Usando o produto interno Hermiteano canónico $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para identificar $E$ com $E^*$, podemos pensar no estado interno da partícula como uma secção de $E^* \otimes E$, que a equação de Wong e a compatibilidade de $\nabla$ com $\langle \cdot, \cdot \rangle$ implicam ser transportada paralelamente ao longo de $c$:

$$\frac{d\boldsymbol{\psi}}{d\tau} + 2\mathbf{A}(\dot{c}) \times \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0}.$$

A equação do movimento será então

$$m\ddot{c}^\sharp = -\dot{c} \lrcorner (\boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{F}).$$

**Exercício 5.1** *Escreva a equação de Klein-Gordon para uma partícula num campo de Yang-Mills com grupo de estrutura $SU(2)$.*

**Exercício 5.2** *Mostre que dado um quaternião vectorial $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ qualquer,*

$$\mathbf{A} = A\,\mathbf{v}$$

*determina uma solução das equações de Yang-Mills com grupo de estrutura $SU(2)$* **sse** *$A \in \Omega^1(\mathbb{R}^4)$ determina uma solução das equações de Maxwell (portanto a teoria de Yang-Mills com grupo de estrutura $SU(2)$ contém todas as soluções das equações de Maxwell como casos particulares). Verifique que neste caso a equação de Wong se reduz à lei de Lorentz.*

[2] Note-se a aparente discrepância entre a formulação clássica (equação de Wong) e a formulação quântica (equação de Klein Gordon): enquanto que na primeira a partícula é descrita por uma secção de $E \otimes E^*$, na segunda ela é descrita por uma secção de $E$. Na realidade, dada uma secção paralelamente transportada de $E$, podemos sempre usar o produto interno Hermiteano para construir uma secção paralelamente transportada de $E \otimes E^*$, e apenas secções deste tipo representam o análogo clássico das partículas descritas pela equação de Klein-Gordon (**quarks** no caso de $SU(3)$); secções de $E \otimes E^*$ arbitrárias descrevem partículas mais gerais (**gluões** no caso de $SU(3)$). No caso de $SU(2)$ esta distinção não existe, uma vez que qualquer secção de $E \otimes E^*$ pode ser construida a partir de secções de $E$.

**Exercício 5.3** *Suponha que* $\mathbf{A}$ *determina uma solução das equações de Yang-Mills com grupo de estrutura* $SU(2)$. *O que pode dizer acerca de* $-\mathbf{A}$*?*

**Exercício 5.4** *Mostre que*

$$\mathbf{A} = a(t)dx\mathbf{i} + b(t)dy\mathbf{j} + c(t)dz\mathbf{k}$$

*determina uma solução das equações de Yang-Mills com grupo de estrutura* $SU(2)$ **sse** *as funções* $a, b, c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *satisfazem o sistema de EDOs não lineares*

$$\begin{cases} \ddot{a} + 4a(b^2 + c^2) = 0 \\ \ddot{b} + 4b(a^2 + c^2) = 0 \\ \ddot{c} + 4c(a^2 + b^2) = 0 \end{cases}.$$

*Mostre ainda que estas são as equações de Euler-Lagrange para o Lagrangeano*

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{a}^2 + \dot{b}^2 + \dot{c}^2\right) - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2.$$

*Qual seria o análogo destas soluções para as equações de Maxwell?*

**Exercício 5.5** *O* **monopolo de Dirac** *corresponde ao campo electromagnético* $F$ *dado por*

$$\mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{B} = \frac{g\mathbf{x}}{4\pi|\mathbf{x}|^3}$$

*(onde* $g$ *é a* **carga magnética** *do monopolo). Na versão quântica,* $-ieF$ *é a matriz de curvatura de uma conexão num fibrado de linha complexo* $L$ *sobre* $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2$*, onde* $e$ *é a carga da partícula quântica. Mostre que a primeira classe de Chern deste fibrado é*

$$c_1(L) = -\frac{eg}{2\pi}[\mu],$$

*onde* $[\mu]$ *é o gerador canónico de* $H^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2) \cong H^2(\mathbb{S}^2)$. *Sabendo que* $c_1(L)$ *é necessariamente um múltiplo inteiro de* $[\mu]$*, conclua que*

$$eg = 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

*Por outras palavras, a existência de um monopolo magnético de carga* $g \neq 0$ *implica que a carga de qualquer partícula carregada deve ser um múltiplo inteiro de* $\frac{2\pi}{g}$ *(***condição de quantização da carga eléctrica de Dirac***).*

**Exercício 5.6** *O* **monopolo de Wu-Yang** *é o campo de Yang-Mills com grupo de estrutura* $SU(2)$ *determinado por*

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{2|\mathbf{x}|^2}\mathbf{x} \times d\mathbf{x}.$$

*Mostre que o campo de Yang-Mills é*

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{2|\mathbf{x}|^2}d\mathbf{x} \times d\mathbf{x} + \frac{1}{|\mathbf{x}|^4}(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})(\mathbf{x} \times d\mathbf{x}) + \frac{\mathbf{x}}{4|\mathbf{x}|^4}\mathbf{x} \cdot (d\mathbf{x} \times d\mathbf{x}),$$

*o seu dual é*

$$^*\mathbf{F} = -\frac{\mathbf{x}}{2|\mathbf{x}|^4}dt \wedge (\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}),$$

*e verifique que se trata de uma solução das equações de Yang-Mills.*

**Exercício 5.7** *Em Teoria Quântica de Campo surgem situações em que é necessário resolver as equações de Yang-Mills com grupo de estrutura $SU(2)$ relativas à* **métrica Euclidiana** *em $\mathbb{R}^4$,*

$$g = dt \otimes dt + dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz.$$

*Neste caso, tem-se $^{**}R = R$, e é possível obter soluções* **auto-duais**, *i.e. tais que $^*R = R$* [3]*. A identidade de Bianchi implica então que as equações Yang-Mills se verificam. Mostre que, identificando $\mathbb{R}^4$ com os quaterniões $\mathbb{H}$ e $\mathfrak{su}(2)$ com os quaterniões puramente vectoriais, a conexão determinada pela matriz*

$$\omega(x) = \frac{x d\bar{x} - dx \bar{x}}{2\left(1 + |x|^2\right)}$$

*possui curvatura auto-dual com matriz*

$$\Omega(x) = \frac{dx \wedge d\bar{x}}{\left(1 + |x|^2\right)^2}.$$

*Este campo de Yang-Mills diz-se o* **instantão fundamental**.

**Exercício 5.8** *A esfera $\mathbb{S}^4$ pode ser dada por duas parametrizações $\phi_1^{-1}, \phi_2^{-1} : \mathbb{H} \to \mathbb{S}^4$, cuja função de transição é*

$$y = \phi_2 \circ \phi_1^{-1}(x) = x^{-1}$$

*(as cartas locais correspondentes são, a menos de reordenamento das coordenadas, as projecções estereográficas a partir dos dois pólos). Mostre que as formas locais*

$$\omega = \frac{x d\bar{x} - dx \bar{x}}{2\left(1 + |x|^2\right)} \quad \text{e} \quad \theta = \frac{y d\bar{y} - dy \bar{y}}{2\left(1 + |y|^2\right)}$$

*satisfazem*

$$\theta = \left(\frac{x}{|x|}\right)^{-1} \omega \, \frac{x}{|x|} + \left(\frac{x}{|x|}\right)^{-1} d\left(\frac{x}{|x|}\right)$$

*e portanto determinam uma conexão num certo fibrado vectorial $E$ sobre $\mathbb{S}^4$ com grupo de estrutura $SU(2)$. Calcule a segunda classe de Chern $c_2(E)$, e conclua que este fibrado não é trivial.*

[3] O mesmo não é verdade para a métrica de Minkowski, já que neste caso $^{**}R = -R$.