# Geometria das Teorias de Gauge

Pedro Matias
Departamento de Matemática
Instituto Superior Técnico
Av. Rovisco Pais, 1049-001 Lisboa, Portugal
pmatias@fisica.ist.utl.pt

26 de Março de 2004

# Resumo

Este trabalho é uma introdução à geometria das teorias de gauge clássicas.

No capítulo 1, introduzo alguns conceitos preliminares de carácter geométrico, necessários ao longo do texto. Este capítulo tem por base, de carácter algébrico, o Apêndice.

Nos capítulos 2 e 3 apresento as definições de fibrado principal, conexão e curvatura. Farei algumas observações que relacionam estes conceitos com a Física.

No capítulo 4 introduzo a noção de campo de matéria como caso particular de uma forma tensorial num fibrado principal e também a definição de derivada covariante.

Finalmente, no capítulo 5, apresento um formalismo geral para modelar a interacção de um campo de matéria com um campo de gauge. No final, ilustro este formalismo com exemplos.

# Convenções

- Todas as variedades, aplicações entre variedades e campos tensoriais são de classe $C^\infty$.
- Se $f\colon M \to N$ é uma aplicação entre duas variedades, denota-se por $f_{*p}\colon T_p(M) \to T_{f(p)}(N)$ a aplicação derivada no ponto $p \in M$. A aplicação transposta $(f_{*p})^*\colon T^*_{f(p)}(N) \to T^*_p(M)$ é definida por
$$(f_{*p})^*(\omega)(v) = \omega(f_{*p}(v)),$$
para $\omega \in T^*_{f(p)}(N)$, $v \in T_p(M)$.
- Os campos tensoriais em variedades representam-se a **bold**. Usam-se letras gregas $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\tau}, \dots$ para formas diferenciais e letras maiúsculas $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{W}, \dots$ para campos vectoriais.
- A álgebra dos campos vectoriais na variedade $M$ denota-se por $\mathfrak{X}(M)$.
- Usam-se letras caligráficas $\mathcal{E}, \mathcal{V}, \mathcal{U}, \mathcal{W}, \dots$ para espaços vectoriais.
- As formas em espaços vectoriais representam-se por letras gregas sem bold $\alpha, \beta, \varphi, \dots$.
- O símbolo $\equiv$ indica notação.
- Índices repetidos indicam soma (convenção de Einstein).

# Conteúdo

# Capítulo 1

# Preliminares

## 1.1 Representação Adjunta

Seja $G$ um grupo de Lie e $g \in G$. Define-se a aplicação **conjugação por** $g$ como

$$\begin{array}{rccl} C_g\colon & G & \to & G \\ & h & \mapsto & C_g(h) = (L_g \circ R_{g^{-1}})(h) = ghg^{-1}, \end{array}$$

onde $L_g$ e $R_g$ são as translacções esquerda e direita por $g$, respectivamente. Como $C_g$ é um difeomorfismo de $G$, a sua derivada em qualquer ponto é um isomorfismo linear. Em particular,

$$\begin{array}{rccl} (C_g)_{*e}\colon & T_e(G) & \to & T_e(G) \\ & v & \mapsto & (L_g \circ R_{g^{-1}})_{*e}(v) \end{array}$$

é um automorfismo linear de $T_e(G)$ e denota-se por $\mathrm{Ad}_g$. A aplicação

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{Ad}\colon & G & \to & GL(T_e(G)) \\ & g & \mapsto & \mathrm{Ad}_g \end{array}$$

chama-se a **representação adjunta de** $G$ **em** $T_e(G)$ e satisfaz $\mathrm{Ad}_{gh} = \mathrm{Ad}_g \circ \mathrm{Ad}_h$ para todo o $g, h \in G$.

**Observação 1.** *Se $G$ é um grupo de Lie matricial,*

$$\mathrm{Ad}_g(A) = gAg^{-1} \qquad \forall g \in G, \forall A \in T_e(G). \tag{1.1}$$

## 1.2 Formas diferenciais com valores num espaço vectorial

### 1.2.1 Definições gerais

Seja $X$ uma variedade de dimensão $n$ e $\mathcal{V}$ um espaço vectorial real de dimensão $m$. Para $k = 0, 1, \ldots, n$ denotamos por $\Lambda^k(X)$ o conjunto das $k$-formas diferenciais em $X$. Note-se que $\Lambda^k(X)$ tem estrutura de $C^\infty(X)$-módulo e em particular é um espaço vectorial real de dimensão $n!/(k!(n-k)!)$.

Define-se o **espaço das $k$-formas diferenciais em $X$ com valores em $\mathcal{V}$** por

$$\Lambda^k(X, \mathcal{V}) = \Lambda^k(X) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{V}.$$

Se $\{T_1, \ldots T_m\}$ é uma base de $\mathcal{V}$, então qualquer $\boldsymbol{\alpha} \in \Lambda^k(X, \mathcal{V})$ escreve-se de forma única como

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^i \otimes T_i,$$

onde $\boldsymbol{\alpha}^i \in \Lambda^k(X)$, $i = 1, \ldots, m$. A noção de derivada exterior de $k$-formas diferenciais em $X$ estende-se naturalmente às $k$-formas diferenciais em $X$ com valores em $\mathcal{V}$, ou seja

$$d\boldsymbol{\alpha} := d\boldsymbol{\alpha}^i \otimes T_i.$$

É fácil ver que esta definição não depende da escolha de base para $\mathcal{V}$.

Gostariamos também de estender o produto exterior de $k$-formas diferenciais em $X$ ao espaço $\Lambda^k(X, \mathcal{V})$. Para o conseguirmos teremos de introduzir uma estrutura algébrica adicional no espaço vectorial $\mathcal{V}$. Numa situação mais geral a construcção é a seguinte: sejam $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ espaços vectoriais reais e $\rho\colon \mathcal{U} \times \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação bilinear. Se $\boldsymbol{\alpha} \in \Lambda^k(X, \mathcal{U})$ e $\boldsymbol{\beta} \in \Lambda^l(X, \mathcal{V})$, define-se o **$\rho$-produto exterior $\boldsymbol{\alpha} \wedge_\rho \boldsymbol{\beta}$** $\in \Lambda^{k+l}(X, \mathcal{W})$ por

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\alpha} \wedge_\rho \boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_{k+l}) &= \\ = \frac{1}{k!l!} \sum_\sigma (-1)^\sigma \rho\left(\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{X}_{\sigma(1)}, \ldots, \boldsymbol{X}_{\sigma(k)}),\, \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{X}_{\sigma(k+1)}, \ldots, \boldsymbol{X}_{\sigma(k+l)})\right),\end{aligned} \quad (1.2)$$

onde $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_{k+l} \in \mathfrak{X}(X)$ e a soma é sobre as permutações $\sigma \in S_{k+l}$ de $\{1, \ldots, k+l\}$. Se $\alpha \in \Lambda^0(X, \mathcal{U}), \beta \in \Lambda^0(X, \mathcal{V})$ definimos $\alpha \wedge_\rho \beta = \rho\,(\alpha,\, \beta)$.

Usando a definição anterior, mostra-se facilmente a seguinte relação entre a derivada exterior e o $\rho$-produto exterior:

$$d(\boldsymbol{\alpha} \wedge_\rho \boldsymbol{\beta}) = d\boldsymbol{\alpha} \wedge_\rho \boldsymbol{\beta} + (-1)^k \boldsymbol{\alpha} \wedge_\rho \boldsymbol{\beta}. \quad (1.3)$$

**Exemplo 1.** *Seja $\mathcal{U} = \mathcal{V} = \mathcal{W} = \mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e consideremos a aplicação bilinear*

$$\begin{array}{rccl} \rho_1\colon & \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} & \to & \mathfrak{g} \\ & (A,B) & \mapsto & \rho_1(A,B) = [A,B]. \end{array}$$

*Seja $\{T_1,\dots,T_m\}$ uma base de $\mathfrak{g}$ com constantes de estrutura definidas por $[T_i,T_j] = C_{ij}^k T_k$. Usando a equação (1.2) é fácil ver que para $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^i \otimes T_i \in \Lambda^k(X,\mathfrak{g})$ e $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^j \otimes T_j \in \Lambda^l(X,\mathfrak{g})$,*

$$\boldsymbol{\alpha} \wedge_{\rho_1} \boldsymbol{\beta} \equiv [\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}] = \boldsymbol{\alpha}^i \wedge \boldsymbol{\beta}^j \otimes [T_i,T_j] = C_{ij}^k\, \boldsymbol{\alpha}^i \wedge \boldsymbol{\beta}^j \otimes T_k. \tag{1.4}$$

*O $\rho_1$-produto exterior goza de algumas propriedades que passamos a enunciar.*

**Proposição 1.** *Se $\boldsymbol{\alpha} \in \Lambda^k(X,\mathfrak{g})$, $\boldsymbol{\beta} \in \Lambda^l(X,\mathfrak{g})$ e $\boldsymbol{\varphi} \in \Lambda^i(X,\mathfrak{g})$, então*

1. $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}] = (-1)^{kl+1}[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}]$;
2. $(-1)^{ki}[[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}],\boldsymbol{\varphi}] + (-1)^{il}[[\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\alpha}],\boldsymbol{\beta}] + (-1)^{lk}[[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\varphi}],\boldsymbol{\alpha}] = 0.$

*Demonstração.* [Bl, pp. 36]. □

**Exemplo 2.** *Seja $\mathcal{U} = \mathcal{V} = \mathcal{W} = \mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de um grupo de Lie matricial e consideremos a aplicação bilinear*

$$\begin{array}{rccl} \rho_2\colon & \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} & \to & \mathfrak{g} \\ & (A,B) & \mapsto & \rho_2(A,B) = AB. \end{array}$$

*Para $\boldsymbol{\alpha} \in \Lambda^k(X,\mathfrak{g})$ e $\boldsymbol{\beta} \in \Lambda^l(X,\mathfrak{g})$ denotamos o $\rho_2$-produto exterior por*

$$\boldsymbol{\alpha} \wedge_{\rho_2} \boldsymbol{\beta} \equiv \boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta}.$$

*Existe uma relação entre os produtos exteriores relativos a $\rho_1$ e $\rho_2$ quando $\rho_1$ é uma aplicação bilinear de uma álgebra de Lie de um grupo de Lie matricial. Nesse caso $\rho_1(A,B) = AB - BA$ (comutador de matrizes) para $A,B \in \mathfrak{g}$, logo*

$$\boldsymbol{\alpha} \wedge_{\rho_1} \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} \wedge_{\rho_2} \boldsymbol{\beta} - (-1)^{kl} \boldsymbol{\beta} \wedge_{\rho_2} \boldsymbol{\alpha},$$

*ou na nossa notação,*

$$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}] = \boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta} - (-1)^{kl} \boldsymbol{\beta} \wedge \boldsymbol{\alpha}. \tag{1.5}$$

### 1.2.2 Forma canónica de Cartan

Seja $G$ um grupo de Lie $n$-dimensional e $\mathfrak{g}$ a sua álgebra de Lie, vista como $T_e(G)$. A **forma canónica de Cartan** é a 1-forma diferencial $\mathbf{\Theta}$ em $G$ com valores em $\mathfrak{g}$ definida da seguinte maneira: para cada $g \in G$,

$$\begin{array}{rrcl} \mathbf{\Theta}_g : & T_g(G) & \to & \mathfrak{g} \\ & v & \mapsto & \mathbf{\Theta}_g(v) = (L_{g^{-1}})_{*g}(v). \end{array}$$

**Teorema 1.** *Seja $\{T_1, \ldots, T_n\}$ uma base de $\mathfrak{g}$, $\{T^1, \ldots T^n\}$ a respectiva base dual em $\mathfrak{g}^* = T_e^*(G)$ e $\{\mathbf{\Theta}^1, \ldots \mathbf{\Theta}^n\}$ as únicas 1-formas diferenciais em $G$ invariantes à esquerda geradas por $\{T^1, \ldots T^n\}$, i.e., $\mathbf{\Theta}_e^i = T^i$ para $i = 1, \ldots, n$. Então, a forma canónica de Cartan $\mathbf{\Theta}$ é dada por*

$$\mathbf{\Theta} = \mathbf{\Theta}^1 \otimes T_1 + \ldots + \mathbf{\Theta}^n \otimes T_n.$$

*Demonstração.* Seja $(T_j)_g := (L_g)_{*e} T_j$. Para cada $g \in G$ e $v = v^j (T_j)_g \in T_g(G)$ temos

$$\begin{aligned} (\mathbf{\Theta}^i \otimes T_i)_g(v) &= \mathbf{\Theta}_g^i(v) T_i \\ &= (L_{g^{-1}})_{*g}^*(T^i)(v) T_i \\ &= T^i((L_{g^{-1}})_{*g}(v)) T_i \\ &= T^i((L_{g^{-1}})_{*g}(L_g)_{*e}(v^j T_j)) T_i \\ &= v^i T_i \\ &= v^i (L_{g^{-1}})_{*g}(T_i)_g \\ &= (L_{g^{-1}})_{*g}(v) \\ &= \mathbf{\Theta}_g(v). \end{aligned}$$

□

**Proposição 2.** *A forma canónica de Cartan é invariante à esquerda, i.e., $(L_g)^* \mathbf{\Theta} = \mathbf{\Theta}$ para todo o $g \in G$.*

*Demonstração.* É trivial pois $\mathbf{\Theta} = \mathbf{\Theta}^i \otimes T_i$ e $\mathbf{\Theta}^i$ são 1-formas diferenciais invariantes à esquerda em $G$. □

**Proposição 3.** *A forma canónica de Cartan satisfaz $R_g^* \mathbf{\Theta} = \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ \mathbf{\Theta}$ para todo o $g \in G$.*

*Demonstração.* Para $v \in T_h(G)$ temos

$$\begin{aligned}
(R_g^*\mathbf{\Theta})_h(v) &= \mathbf{\Theta}_{gh}((R_g)_{*h}(v)) \\
&= (L_{(gh)^{-1}})_{*gh} \circ (R_g)_{*h}(v) \\
&= (L_{h^{-1}} \circ L_{g^{-1}})_{*gh} \circ (R_g)_{*h}(v) \\
&= (L_{h^{-1}} \circ L_{g^{-1}} \circ R_g)_{*h}(v) \\
&= (L_{g^{-1}} \circ R_g)_{*e} \circ (L_{h^{-1}})_{*h}(v) \\
&= \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\mathbf{\Theta}_h(v)).
\end{aligned}$$

□

## 1.3 Orientabilidade

No apêndice define-se o conceito de orientabilidade em espaços vectoriais e mostra-se que qualquer espaço vectorial tem duas orientações possíveis. Nesta secção iremos introduzir a noção de orientabilidade em variedades.

Intuitivamente, a definição mais natural de orientação numa variedade $X$ consiste numa escolha de orientações para cada espaço tangente $T_x(X)$ "variando suavemente com $x$" num sentido apropriado. De acordo com a definição abaixo nem sempre é possível efectuar tal escolha e existem variedades que não admitem nenhuma orientação.

Seja $X$ uma variedade $n$-dimensional e $U \subset X$ um conjunto aberto. Uma **orientação em** $U$ é uma função $\mu$ que associa a cada $x \in U$ uma orientação $\mu_x$ em $T_x(X)$ satisfazendo a seguinte condição: para cada $x_0 \in U$ existe uma vizinhança $W \subset U$ de $x_0$ e $n$ campos vectoriais $\boldsymbol{X}_1, \ldots \boldsymbol{X}_n$ em $W$ tais que $\{\boldsymbol{X}_{1,x}, \ldots \boldsymbol{X}_{n,x}\} \in \mu_x$ para todo o $x \in W$. A variedade $X$ diz-se **orientável** se existe uma orientação em $X$. Um variedade orientável $X$ diz-se **orientada** se fixármos uma determinada orientação $\mu$ em $X$.

Tal como no caso da orientabilidade em espaços vectoriais, existe uma relaçao entre o espaço das $n$-formas diferenciais em $X$ e as possíveis orientações de $X$ (no caso da variedade ser orientável).

**Teorema 2.** *Uma variedade $n$-dimensional $X$ é orientável sse admite uma $n$-forma diferencial não nula em todos os pontos $x \in X$.*

*Demonstração.* [N2, pp. 241] □

O teorema anterior garante que uma $n$-forma diferencial em $X$ que nunca se anule, determina uma única orientação numa variedade orientável $X$. Porém, uma orientação em $X$ não determina unicamente um elemento não nulo de $\Lambda^n(X)$. Esta questão pode ser contornada se equipármos $X$ com uma métrica pseudo-Riemanniana, em analogia com o que fizémos no contexto algébrico (ver apêndice).

**Teorema 3.** *Seja $X$ uma variedade de dimensão $n$ com orientação $\mu$ e métrica pseudo-Riemanniana $\boldsymbol{g}$. Então existe uma única forma diferencial* $\mathbf{vol} \in \Lambda^n(X)$ *tal que para cada $x \in X$ e cada base ortonormada e orientada $\{e_1, \ldots e_n\}$ de $T_x(X)$,* $\mathbf{vol}_x(e_1, \ldots e_n) = 1$.

*Demonstração.* [N2, pp. 242] □

A $n$-forma diferencial **vol** acima chama-se a **forma de volume canónica em $X$ induzida por $\mu$ e $\boldsymbol{g}$**.

## 1.4 O operador de Hodge

Uma orientação $\mu$ e uma métrica pseudo-Riemanniana $\boldsymbol{g}$ em $X$ equipam cada espaço tangente $T_x(X)$ com uma orientação $\mu_x$ e um produto interno $\boldsymbol{g}_x$. Em cada $x \in X$ está definido um operador de Hodge (ver apêndice)

$$^{*_x}\colon \Lambda^k(T_x(X)) \to \Lambda^{n-k}(T_x(X)),$$

para $k = 0, \ldots n$. O operador de Hodge na variedade $X$ é definido ponto a ponto, i.e.

$$(^{*}\boldsymbol{\beta})_x(v_1, \ldots, v_{n-k}) = {}^{*_x}(\boldsymbol{\beta}_x)(v_1, \ldots, v_{n-k}),$$

onde $\boldsymbol{\beta} \in \Lambda^k(X)$, $v_1, \ldots, v_{n-k} \in T_x(X)$.

**Observação 2.** *Mostra-se que $^{*}\colon \Lambda^k(X) \to \Lambda^{n-k}(X)$ é um operador $C^\infty(X)$-linear. Além disso, todas as construções algébricas com espaços vectoriais introduzidas no apêndice estendem-se ao caso das formas diferenciais numa variedade, efectuando as definições ponto a ponto.*

# Capítulo 2

# Fibrados Principais

## 2.1 Definições gerais

**Definição 1.** *Sejam $X$ uma variedade e $G$ um grupo de Lie. Um* ***fibrado principal sobre*** *$X$* ***com grupo de estrutura*** *$G$ (ou simplesmente um $G$-**fibrado principal sobre** $X$) consiste em*

- *uma variedade $P$;*
- *uma aplicação sobrejectiva $\pi\colon P \to X$;*
- *uma acção direita de $G$ em $P$, $\sigma\colon P \times G \to P$, $\sigma(p,g) \equiv \sigma_g(p) \equiv p \cdot g$ para $p \in P$, $g \in G$,*

*obedecendo às seguintes condições:*

1. *$\pi(p \cdot g) = \pi(p)$ para todo o $p \in P$ e todo o $g \in G$;*
2. *$P$ é* ***localmente trivial****, i.e., para cada $x \in X$ existe uma vizinhança $V \subset X$ de $x$ e um difeomorfismo $\Psi\colon \pi^{-1}(V) \to V \times G$ da forma*

$$\Psi(p) = (\pi(p), \psi(p)),$$

*onde $\psi\colon \pi^{-1}(V) \to G$ satisfaz*

$$\psi(p \cdot g) = \psi(p)g$$

*para todo o $p \in \pi^{-1}(V)$ e todo o $g \in G$.*

As variedades $P$ e $X$ designam-se por **espaço total** e **base**, respectivamente, a aplicação $\pi\colon P \to X$ diz-se a **projecção** e para cada $x \in X$, $\pi^{-1}(x)$ chama-se **a fibra sobre** $x$. O grupo de estrutura $G$ designa-se normalmente em Física por **grupo de gauge**.

O par $(V, \Psi)$ diz-se uma **trivialização local** (terminologia da Matemática) ou uma **gauge local** (terminologia da Física). A escolha de uma gauge local diferente é usualmente designada em Física por **transformação de gauge local**. Uma família de trivializações locais $\{(V_j, \Psi_j)\}_{j\in J}$ tal que $\bigcup_{j\in J} V_j = X$ chama-se uma **cobertura trivializante de** $X$.

Denotaremos um $G$-fibrado principal sobre $X$ por $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} X$.

**Observação 3.** *A projecção $\pi\colon P \to X$ é uma submersão, i.e., a aplicação $\pi_{*p}\colon T_p(P) \to T_{\pi(p)}(X)$ é sobrejectiva para todo o $p \in P$ (ver [N1, pp. 207]). Consequentemente, a fibra sobre $\pi(p)$ é uma subvariedade de $P$ de dimensão* $\dim P - \dim X$. *Como $P$ é localmente trivial, cada fibra é difeomorfa ao grupo de estrutura $G$ e portanto* $\dim P - \dim X = \dim G$.

**Lema 1.** *Para cada $p \in P$, a fibra sobre $\pi(p)$ coincide com a órbita de $p$ sob a acção de $G$, i.e.*

$$\pi^{-1}(\pi(p)) = \{p \cdot g \mid g \in G\} = p \cdot G.$$

*Demonstração.* $\pi^{-1}(\pi(p)) \supset p \cdot G$ é imediato pela condição 1 na definição de fibrado principal. Para mostrármos a inclusão no sentido contrário consideremos $p' \in \pi^{-1}(\pi(p))$. Usando a condição 2, escolha-se uma trivialização local $(V, \Psi)$ em $x = \pi(p) = \pi(p')$. Como $\psi(p), \psi(p') \in G$, existe $g \in G$ tal que $\psi(p)g = \psi(p')$, logo $\psi(p \cdot g) = \psi(p')$ e portanto $\Psi(p \cdot g) = (\pi(p \cdot g), \psi(p \cdot g)) = (\pi(p), \psi(p')) = (\pi(p'), \psi(p')) = \Psi(p')$. Como $\Psi$ é bijectiva, temos $p' = p \cdot g$. □

**Exemplo 3.** *Sejam $P = X \times G$, $\pi\colon X \times G \to X$, $\pi(x, g) = x$ e $\sigma((x, h), g) = (x, h) \cdot g = (x, hg)$. Tomemos $V = X$ na condição 2 e $\Psi$ a aplicação identidade em $\pi^{-1}(V) = \pi^{-1}(X) = X \times G$. Então $G \hookrightarrow X \times G \xrightarrow{\pi} X$ chama-se o* ***$G$- fibrado principal trivial sobre*** *$X$.*

Seja $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} X$ um $G$-fibrado principal sobre $X$. Fixemos uma cobertura trivializante $\{(V_j, \Psi_j)\}_{j\in J}$ de $X$ e sejam $i, j \in J$ tais que $V_i \bigcap V_j \neq \emptyset$. É fácil ver que para cada $x \in V_i \bigcap V_j$, $\psi_i(p)(\psi_j(p))^{-1}$ toma o mesmo valor em todo o $p \in \pi^{-1}(x)$. De facto,

$$\psi_i(p \cdot g)(\psi_j(p \cdot g))^{-1} = \psi_i(p)gg^{-1}(\psi_j(p))^{-1} = \psi_i(p)(\psi_j(p))^{-1}.$$

Consequentemente, podemos definir, para $i, j \in J$ tais que $V_i \bigcap V_j \neq \emptyset$, a aplicação

$$\begin{array}{rrcl} g_{ij}\colon & V_i \bigcap V_j & \to & G \\ & x & \mapsto & g_{ij}(x) = \psi_i(p)(\psi_j(p))^{-1}, \end{array}$$

onde $p \in \pi^{-1}(x)$ é arbitrário. Estas funções chamam-se **funções de transição da trivialização local** $(V_j, \Psi_j)$ **para a trivialização local** $(V_i, \Psi_i)$ e satisfazem as seguintes propriedades:

- $g_{ii}(x) = e$;
- $g_{ij}(x) g_{ji}(x) = e$;
- $g_{ij}(x) g_{jk}(x) g_{ki}(x) = e$,

sempre que $i, j, k \in J$ e $x \in V_i \bigcap V_j \bigcap V_k \neq \emptyset$.

## 2.2 Trivializações locais versus secções locais

**Definição 2.** *Uma* ***secção local*** *de $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} X$ sobre um conjunto aberto $V \subset X$ é uma aplicação $s\colon V \to \pi^{-1}(V)$ tal que $\pi \circ s = \mathrm{id}_V$.*

**Proposição 4.** *Existe uma correspondência biunívoca entre trivializações locais e secções locais de $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} X$.*

*Demonstração.* Se $s\colon V \to \pi^{-1}(V)$ é uma secção local, definimos uma trivialização local $\Psi\colon \pi^{-1}(V) \to V \times G$ por $\Psi(s(x) \cdot g) = (x, g)$. Reciprocamente, dada uma trivialização local $(V, \Psi)$, definimos uma secção local $s\colon V \to \pi^{-1}(V)$ por $s(x) = \Psi^{-1}(x, e)$. □

**Proposição 5.** *Se $\Psi_i\colon \pi^{-1}(V_i) \to V_i \times G$, $\Psi_j\colon \pi^{-1}(V_j) \to V_j \times G$ são trivializações locais de um $G$-fibrado principal sobre $X$ com $V_i \bigcap V_j \neq \emptyset$ e $s_i\colon V_i \to \pi^{-1}(V_i)$, $s_j\colon V_j \to \pi^{-1}(V_j)$ são as secções associadas às trivializações locais $(V_i, \Psi_i)$ e $(V_j, \Psi_j)$ respectivamente, então*

$$s_j(x) = s_i(x) \cdot g_{ij}(x), \qquad x \in V_i \bigcap V_j.$$

*Demonstração.* [N1]. □

## 2.3 Subespaços verticais e campos vectoriais fundamentais

Seja $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} X$ um $G$-fibrado principal sobre $X$. Pela observação 3, cada $\pi^{-1}(x)$, $x \in X$, é uma subvariedade de $P$ difeomorfa a $G$. Podemos então definir o **subespaço vertical de** $T_p(P)$ em $p \in \pi^{-1}(x)$ por $\mathrm{V}_p(P) = T_p(\pi^{-1}(x)) \subset T_p(P)$. Os elementos de $\mathrm{V}_p(P)$ chamam-se **vectores verticais em** $p$.

A acção $\sigma$ de $G$ em $P$ permite-nos identificar de uma forma natural cada subespaço vertical $\mathrm{V}_p(P)$ com a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de $G$ da seguinte forma: a cada $A \in \mathfrak{g}$ associamos um campo vectorial $A^{\#} \in \mathfrak{X}(P)$ tal que

$$A^{\#}_p = (\sigma_p)_{*e}(A) = \frac{d}{dt}\, p \cdot \exp(tA)\ |_{t=0}, \tag{2.1}$$

onde $\sigma_p \colon G \to P$ é a aplicação $\sigma_p(g) = p{\cdot}g$. $A^{\#}$ chama-se o **campo vectorial fundamental em** $P$ **induzido por** $A$. É válida a seguinte

**Proposição 6.** *A aplicação $A \to A^{\#}_p$ é um isomorfismo linear de $\mathfrak{g}$ para $\mathrm{V}_p(P)$. Além disso temos*

1. $[A, B]^{\#} = [A^{\#}, B^{\#}], \qquad \forall A, B \in \mathfrak{g}$,
2. $(\sigma_g)_*(A^{\#}) = (\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(A))^{\#}, \qquad \forall g \in G, \forall A \in \mathfrak{g}$.

*Demonstração.* [N1, pp. 243-245] □

# Capítulo 3

# Conexões em Fibrados Principais

## 3.1 Definições gerais

Seja $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} X$ um $G$-fibrado principal sobre $X$.

**Definição 3.** *Uma **conexão** em $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} X$ é uma 1-forma diferencial $\boldsymbol{\omega}$ em $P$ com valores em $\mathfrak{g}$ tal que*

1. $\boldsymbol{\omega}(A^{\#}) = A, \qquad \forall A \in \mathfrak{g}$;
2. $(\sigma_g)^* \boldsymbol{\omega} = \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ \boldsymbol{\omega}, \qquad \forall g \in G.$

**Observação 4.** *Em Física, uma conexão $\boldsymbol{\omega}$ diz-se um **potencial de gauge** em $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} X$.*

Se escolhermos uma gauge local $s\colon V \to \pi^{-1}(V)$, $\boldsymbol{\mathcal{A}} := s^*\boldsymbol{\omega} \in \Lambda^1(V, \mathfrak{g})$ chama-se um **potencial de gauge local** (na gauge $s$). Se $\{(V_j, \Psi_j)\}_{j \in J}$ é uma cobertura trivializante de $X$ e $s_j\colon V_j \to \pi^{-1}(V_j)$ é a secção local associada à trivialização $(V_j, \Psi_j)$, a família $\{\boldsymbol{\mathcal{A}}_j = s_j^*\boldsymbol{\omega}\}_{j \in J}$ de potenciais de gauge locais satisfaz

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_j = \mathrm{Ad}_{g_{ij}^{-1}} \circ \boldsymbol{\mathcal{A}}_i + g_{ij}^* \boldsymbol{\Theta} \tag{3.1}$$

para todo o $i, j \in J$ com $V_i \bigcap V_j \neq \emptyset$, onde $g_{ij}\colon V_i \bigcap V_j \to G$ é a correspondente função de transição e $\boldsymbol{\Theta}$ é a forma canónica de Cartan em $G$ (ver [N1, pp. 260]).

**Observação 5.** *Se $G$ é um grupo de Lie matricial, $g_{ij}^*\boldsymbol{\Theta} = g_{ij}^{-1}dg_{ij}$, onde $dg_{ij}$ é a derivada exterior de cada componente da matriz $g_{ij} \in G$.*

Reciprocamente, dada uma cobertura trivializante $\{(V_j, \Psi_j)\}_{j\in J}$ de $X$ e uma família $\{\boldsymbol{\mathcal{A}}_j\}_{j\in J}$ de 1-formas em $V_j$ com valores em $\mathfrak{g}$ satisfazendo (3.1) sempre que $V_i \bigcap V_j \neq \emptyset$, existe uma única conexão $\boldsymbol{\omega}$ em $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} X$ tal que $\boldsymbol{\mathcal{A}}_j = s_j^*\boldsymbol{\omega}$ para cada $j \in J$ ([N1, pp. 292]).

Estabelecemos então uma correspondência biunívoca entre conexões num fibrado principal e famílias de potenciais de gauge locais.

Dada uma conexão $\boldsymbol{\omega}$ em $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} X$ podemos definir para cada $p \in P$ o **subespaço horizontal de** $T_p(P)$ por

$$\mathrm{H}_p(P) = \{v \in T_p(p) \mid \boldsymbol{\omega}_p(v) = 0\}.$$

**Proposição 7.** *As seguintes propriedades são válidas:*

1. $T_p(P) = \mathrm{H}_p(P) \oplus \mathrm{V}_p(P), \qquad \forall p \in P;$
2. $(\sigma_g)_{*p}(\mathrm{H}_p(P)) = \mathrm{H}_{p\cdot g}(P), \qquad \forall p \in P, \forall g \in G;$
3. $\pi_{*p} \mid_{\mathrm{V}_p(P)} = 0, \qquad \forall p \in P;$
4. $\pi_{*p} \mid_{\mathrm{H}_p(P)} \colon \mathrm{H}_p(P) \to T_{\pi(p)}(X)$ *é um isomorfismo linear para todo o* $p \in P$.

*Demonstração.* Mostremos primeiro que $T_p(P) = \mathrm{H}_p(P) \oplus \mathrm{V}_p(P)$. Se $v \in \mathrm{H}_p(P) \bigcap \mathrm{V}_p(P)$, $v = A_p^{\#}$ para algum $A \in \mathfrak{g}$ (ver proposição 6), logo $\boldsymbol{\omega}_p(v) = 0 = \omega_p(A_p^{\#}) = A \Rightarrow v = 0$ e portanto $\mathrm{H}_p(P) \bigcap \mathrm{V}_p(P) = \{0\}$. Resta mostrar que $\dim \mathrm{H}_p(P) + \dim \mathrm{V}_p(P) = \dim T_p(P)$. Como $\boldsymbol{\omega}_p \colon T_p(P) \to \mathfrak{g}$ é uma transformação linear, $\dim \ker(\boldsymbol{\omega}_p) + \dim \mathrm{Im}(\boldsymbol{\omega}_p) = \dim T_p(P)$. Mas $\ker(\boldsymbol{\omega}_p) = \mathrm{H}_p(P)$ por definição e $\omega_p \mid_{\mathrm{V}_p(P)} \colon \mathrm{V}_p(P) \to \mathfrak{g}$ é um isomorfismo, logo $T_p(P) = \mathrm{H}_p(P) \oplus \mathrm{V}_p(P)$.

Mostremos agora que $(\sigma_g)_{*p} \mathrm{H}_p(P) = \mathrm{H}_{p\cdot g}(P)$. Se $v \in \mathrm{H}_p(P)$, então $\boldsymbol{\omega}_{p\cdot g}((\sigma_g)_{*p}v) = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\boldsymbol{\omega}_p(v)) = 0$, logo $(\sigma_g)_{*p} \mathrm{H}_p(P) \subset \mathrm{H}_{p\cdot g}(P)$. Seja agora $u \in \mathrm{H}_{p\cdot g}(P)$. Como $(\sigma_g)_{*p} \colon T_p(P) \to T_{p\cdot g}(P)$ é um isomorfismo linear, existe $v \in T_p(P)$ tal que $(\sigma_g)_{*p}v = u$. Mas $\boldsymbol{\omega}_p(v) = \boldsymbol{\omega}_p((\sigma_{g^{-1}})_{*p\cdot g}u) = \mathrm{Ad}_g(\boldsymbol{\omega}_{p\cdot g}(u)) = 0$, logo $v \in \mathrm{H}_p(P)$ e portanto $\mathrm{H}_{p\cdot g}(P) \subset (\sigma_g)_{*p} \mathrm{H}_p(P)$.

A propriedade 3 segue de

$$\pi_{*p}(A_p^{\#}) = \pi_{*p}\frac{d}{dt}\, p \cdot \exp(tA) \mid_{t=0} = \frac{d}{dt}\, \pi(p \cdot \exp(tA)) \mid_{t=0} = \frac{d}{dt}\, \pi(p) \mid_{t=0} = 0,$$

logo $\pi_{*p}\,|_{\mathrm{V}_p(P)} = 0$. Então $\mathrm{V}_p(P) \subset \ker(\pi_{*p})$. Por outro lado, como a aplicação $\pi_{*p}\colon T_p(P) \to T_{\pi(p)}(X)$ é sobrejectiva para todo o $p \in P$, $\dim(\ker \pi_{*p}) + \dim X = \dim P$, logo $\dim \ker \pi_{*p} = \dim G$ e portanto $\mathrm{V}_p(P) = \ker \pi_{*p}$. Usando a propriedade 1 demonstrada acima é fácil ver que $\pi_{*p}\,|_{\mathrm{H}_p(P)}$ é injectiva e como $\dim X = \dim \mathrm{H}_p(P)$ concluimos que é válida a propriedade 4. $\square$

Reciprocamente, dada uma distribuição $p \mapsto \mathcal{D}_p$ em $P$ satisfazendo as propriedades 1 e 2 da proposição 7, existe uma única conexão $\boldsymbol{\omega}$ em $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} X$ tal que $\mathrm{H}_p(P) = \mathcal{D}_p$ para cada $p \in P$ (ver [N1, pp. 294]).

Estabelecemos então uma correspondência biunívoca entre conexões num fibrado principal e distribuições de subespaços horizontais em $P$.

## 3.2 Curvatura

Seja $\boldsymbol{\omega}$ uma conexão em $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} X$.

**Definição 4.** *Se $\boldsymbol{\varphi} \in \Lambda^k(P, \mathfrak{g})$, define-se $\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{H}} \in \Lambda^k(P, \mathfrak{g})$ por*

$$\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_k) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{H}}, \ldots, \boldsymbol{X}_k^{\mathrm{H}}),$$

*onde $\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{H}}, \ldots, \boldsymbol{X}_k^{\mathrm{H}}$ são as componentes horizontais dos campos vectoriais $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_k \in \mathfrak{X}(P)$.*

**Definição 5.** *Se $\boldsymbol{\varphi} \in \Lambda^k(P, \mathfrak{g})$, define-se a **derivada covariante de $\boldsymbol{\varphi}$** por*

$$d^{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\varphi} := (d\boldsymbol{\varphi})^{\mathrm{H}} \in \Lambda^{k+1}(P, \mathfrak{g}).$$

**Definição 6.** *A **curvatura** da conexão $\boldsymbol{\omega}$ é*

$$\boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{\omega}} = d^{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\omega} \in \Lambda^2(P, \mathfrak{g}).$$

**Observação 6.** *Em Física, a curvatura $\boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{\omega}}$ de uma conexão $\boldsymbol{\omega}$ diz-se um **campo de gauge** em $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} X$.*

**Teorema 4 (Equação de estrutura de Cartan).** *A 2-forma de curvatura satisfaz a seguinte equação*

$$\boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{\omega}} = d\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}\,[\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}]. \tag{3.2}$$

Para demonstrármos este teorema necessitamos de alguns resultados auxiliares.

**Lema 2.** *Se $\boldsymbol{Y} \in \mathfrak{X}(X)$, existe um único $\tilde{\boldsymbol{Y}} \in \mathfrak{X}(P)$ tal que $\boldsymbol{\omega}(\tilde{\boldsymbol{Y}}) = 0$ e $\pi_{*p}(\tilde{\boldsymbol{Y}}_p) = \boldsymbol{Y}_{\pi(p)}$ para todo o $p \in P$. Necessariamente $(\sigma_g)_* \tilde{\boldsymbol{Y}} = \tilde{\boldsymbol{Y}}$ para todo o $g \in G$. O campo vectorial $\tilde{\boldsymbol{Y}}$ chama-se o* ***levantamento horizontal de $\boldsymbol{Y}$***.

*Demonstração.* A existência e unicidade de $\tilde{\boldsymbol{Y}}$ seguem do facto da aplicação $\pi_{*p}\,|_{\mathrm{H}_p(P)} \colon \mathrm{H}_p(P) \to T_{\pi(p)}(P)$ ser um isomorfismo linear. Note-se ainda que $\pi_{*p\cdot g}((\sigma_g)_{*p}\tilde{\boldsymbol{Y}}_p) = (\pi \circ \sigma_g)_{*p}\tilde{\boldsymbol{Y}}_p = \pi_{*p}\tilde{\boldsymbol{Y}}_p = \boldsymbol{Y}_{\pi(p)}$ e portanto $(\sigma_g)_{*p}\tilde{\boldsymbol{Y}}_p = \tilde{\boldsymbol{Y}}_{p\cdot g}$ □

**Lema 3.** *Se $A \in \mathfrak{g}$ e $\boldsymbol{Y} \in \mathfrak{X}(X)$, então $[A^\#, \tilde{\boldsymbol{Y}}] = 0$.*

*Demonstração.* Pela equação (2.1) é fácil ver que o fluxo de $A^\#$ em $P$ é dado por $\sigma_{\exp(tA)}$. Então

$$\begin{aligned}
[A^\#, \tilde{\boldsymbol{Y}}]_p &= \frac{d}{dt}\,(\sigma_{\exp(tA)})_{*p\cdot\exp(tA)}(\tilde{\boldsymbol{Y}}_{p\cdot\exp(tA)})\,|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\,\tilde{\boldsymbol{Y}}_p\,|_{t=0} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

onde se usou o facto de $(\sigma_g)_{*p}\tilde{\boldsymbol{Y}}_p = \tilde{\boldsymbol{Y}}_{p\cdot g}$. □

*Demonstração do Teorema 4.* Sejam $\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \in \mathfrak{X}(P)$. Note-se que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\,[\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}](\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}) &= \frac{1}{2}\,([\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{Y}), \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{Z})] - [\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{Z}), \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{X})]) \\
&= [\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{Y}), \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{Z})].
\end{aligned}$$

Temos de mostrar que

$$d\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{Y}^{\mathrm{H}}, \boldsymbol{Z}^{\mathrm{H}}) = d\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}) + [\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{Y}), \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{Z})] \tag{3.3}$$

para todo o $\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \in \mathfrak{X}(P)$. Por linearidade, basta considerar três casos:

1. $\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \in \mathrm{H}(P)$;
2. $\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \in \mathrm{V}(P)$;

3. $\boldsymbol{Y} \in \mathrm{V}(P)$, $\boldsymbol{Z} \in \mathrm{H}(P)$,

onde $\mathrm{H}(P)$ e $\mathrm{V}(P)$ denotam os campos vectoriais horizontais e verticais em $P$, respectivamente.

No caso 1 a equação (3.3) é satisfeita pois $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{Z}) = 0$, $\boldsymbol{Y}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{Y}$ e $\boldsymbol{Z}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{Z}$.

No caso 2 podemos supor que $\boldsymbol{Y} = A^{\#}$ e $\boldsymbol{Z} = B^{\#}$ para $A, B \in \mathfrak{g}$. Então

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}) &= A^{\#}[\boldsymbol{\omega}(B^{\#})] - B^{\#}[\boldsymbol{\omega}(A^{\#})] - \boldsymbol{\omega}([A^{\#}, B^{\#}]) \\ &= -\boldsymbol{\omega}([A, B]^{\#}) \\ &= -[A, B] \\ &= -[\boldsymbol{\omega}(A^{\#}), \boldsymbol{\omega}(B^{\#})] \\ &= -[\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{Y}), \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{Z})], \end{aligned}$$

e portanto ambos os membros de (3.3) anulam-se.

No caso 3 podemos supor que $\boldsymbol{Z} = \tilde{\boldsymbol{W}}$, onde $\tilde{\boldsymbol{W}}$ é o levantamento horizontal de um campo vectorial $\boldsymbol{W}$ em $X$ e $\boldsymbol{Y} = A^{\#}$ para $A \in \mathfrak{g}$. Então

$$d\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}) = A^{\#}(\boldsymbol{\omega}(\tilde{\boldsymbol{W}})) - \tilde{\boldsymbol{W}}(\boldsymbol{\omega}(A^{\#})) - \boldsymbol{\omega}([A^{\#}, \tilde{\boldsymbol{W}}]) = 0,$$

pois $\boldsymbol{\omega}(\tilde{\boldsymbol{W}}) = 0$, $\boldsymbol{\omega}(A^{\#}) = A \in \mathfrak{g}$ e usámos o lema 3 para garantir $[A^{\#}, \tilde{\boldsymbol{W}}] = 0$. Portanto ambos os membros de (3.3) anulam-se. ☐

**Teorema 5 (Identidade de Bianchi).** *Se $\boldsymbol{\omega}$ é uma conexão com curvatura $\boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{\omega}}$, então*

$$d^{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{\omega}} = 0 \tag{3.4}$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} d^{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{\omega}} &= (d(d\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}[\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}]))^{\mathrm{H}} \\ &= \frac{1}{2}([d\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}] - [\boldsymbol{\omega}, d\boldsymbol{\omega}])^{\mathrm{H}} \\ &= ([d\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}])^{\mathrm{H}} \in \Lambda^3(P, \mathfrak{g}). \end{aligned}$$

Então $d^{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{W}) = [d\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}](\boldsymbol{Y}^{\mathrm{H}}, \boldsymbol{Z}^{\mathrm{H}}, \boldsymbol{W}^{\mathrm{H}})$ para $\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{W} \in \mathfrak{X}(P)$. Como $\boldsymbol{\omega}$ anula qualquer campo vectorial horizontal, temos que $d^{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{\omega}} = 0$. ☐

**Teorema 6.** *Para todo o $g \in G$,*

$$(\sigma_g)^*\boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{\omega}} = \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ \boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{\omega}}. \tag{3.5}$$

*Demonstração.* Pela equação (1.4) é evidente que [ , ] é preservado pelo pull-back, i.e., $F^*[\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}] = [F^*\boldsymbol{\varphi}, F^*\boldsymbol{\psi}]$. Então

$$\begin{aligned}
(\sigma_g)^*\boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{\omega}} &= \sigma_g^*(d\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}[\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}]) \\
&= d(\sigma_g)^*\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}[\sigma_g^*\boldsymbol{\omega}, \sigma_g^*\boldsymbol{\omega}] \\
&= d\,\mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}[\mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ \boldsymbol{\omega}, \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ \boldsymbol{\omega}] \\
&= \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ (d\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}[\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}]) \\
&= \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ \boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{\omega}}.
\end{aligned}$$

□

## 3.3 Expressões locais e grupos de Lie matriciais

Se $s\colon V \to \pi^{-1}(V)$ é uma gauge local, $\boldsymbol{\mathcal{F}} := s^*\boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{\omega}} \in \Lambda^2(V, \mathfrak{g})$ chama-se o **campo de gauge local** (na gauge $s$).

Se $\boldsymbol{\mathcal{A}} = s^*\boldsymbol{\omega}$ é o potencial de gauge local (na gauge $s$), então a equação de estrutura de Cartan (3.2) (na gauge $s$) escreve-se

$$\boldsymbol{\mathcal{F}} = d\boldsymbol{\mathcal{A}} + \frac{1}{2}[\boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mathcal{A}}]. \tag{3.6}$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $V \subset X$ é uma vizinhança de coordenadas para uma carta $(V, x^1, \ldots, x^n)$ em $X$ e então

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \boldsymbol{\mathcal{A}}_\alpha dx^\alpha, \tag{3.7}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{F}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta, \tag{3.8}$$

onde $\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \boldsymbol{\mathcal{A}}_\beta - \partial_\beta \boldsymbol{\mathcal{A}}_\alpha + [\boldsymbol{\mathcal{A}}_\alpha, \boldsymbol{\mathcal{A}}_\beta]$ e $\boldsymbol{\mathcal{A}}_\alpha, \boldsymbol{\mathcal{F}}_{\alpha\beta} \in \Lambda^0(V, \mathfrak{g})$.

Mostra-se ainda que a lei de transformação para os campos de gauge locais sob uma transformação de gauge local $s_i \mapsto s_j = s_i \cdot g_{ij}$ é dada por

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}_i \mapsto \boldsymbol{\mathcal{F}}_j = \mathrm{Ad}_{g_{ij}^{-1}} \circ \boldsymbol{\mathcal{F}}_i. \tag{3.9}$$

**Proposição 8.** *Se $G$ é um grupo de Lie matricial, as leis de transformação para os potenciais de gauge locais e os campos de gauge locais são*

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_i \mapsto \boldsymbol{\mathcal{A}}_j = g_{ij}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{A}}_i g_{ij} + g_{ij}^{-1} dg_{ij} \tag{3.10}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}_i \mapsto \boldsymbol{\mathcal{F}}_j = g_{ij}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{F}}_i g_{ij}. \tag{3.11}$$

*Demonstração.* Basta usar as equações (1.1), (3.1), (3.9) e a observação 5. □

**Proposição 9.** *Se $G$ é um grupo de Lie matricial, a equação de estrutura de Cartan é dada por*

$$\boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{\omega}} = d\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\omega}. \tag{3.12}$$

*Além disso, se escolhermos uma gauge local $s$, a equação* (3.12) *escreve-se*

$$\boldsymbol{\mathcal{F}} = d\boldsymbol{\mathcal{A}} + \boldsymbol{\mathcal{A}} \wedge \boldsymbol{\mathcal{A}}. \tag{3.13}$$

*Demonstração.* Basta usar a equação (1.5). □

# Capítulo 4

# Formas Tensoriais e Campos de Matéria

## 4.1 Definições gerais

Seja $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} X$ um $G$-fibrado principal sobre $X$ e $\rho\colon G \to GL(\mathcal{V})$ uma representação de $G$ no espaço vectorial real $\mathcal{V}$. Denotaremos $\rho(g)v \equiv g \cdot v$ para $g \in G$, $v \in \mathcal{V}$.

**Definição 7.** *Uma $k$-forma diferencial $\boldsymbol{\varphi}$ em $P$ com valores em $\mathcal{V}$ diz-se* ***pseudotensorial do tipo*** *$\rho$ se satisfaz*

$$(\sigma_g)^* \boldsymbol{\varphi} = g^{-1} \cdot \boldsymbol{\varphi}, \qquad \forall g \in G.$$

*Denotamos por $\Lambda^k_\rho(P, \mathcal{V})^{\mathrm{PT}}$ o conjunto das $k$-formas diferenciais em $P$ com valores em $\mathcal{V}$, pseudotensoriais do tipo $\rho$.*

*$\boldsymbol{\varphi}$ diz-se* ***tensorial do tipo*** *$\rho$ se é pseudotensorial do tipo $\rho$ e* ***horizontal****, no sentido em que $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_k) = 0$ se algum $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_k \in \mathrm{V}(P)$.*

Denotamos por $\Lambda^k_\rho(P, \mathcal{V})$ (respectivamente $\Lambda^k(P, \mathcal{V})^{\mathrm{H}}$) o conjunto das $k$-formas diferenciais em $P$ com valores em $\mathcal{V}$, tensoriais do tipo $\rho$ (respectivamente horizontais). Claramente $\Lambda^k_\rho(P, \mathcal{V}) = \Lambda^k_\rho(P, \mathcal{V})^{\mathrm{PT}} \bigcap \Lambda^k(P, \mathcal{V})^{\mathrm{H}}$.

**Observação 7.** *Note-se que as noções de forma pseudotensorial, tensorial e horizontal não requerem a existência de uma conexão no fibrado principal $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} X$.*

**Observação 8.** *Se $\phi \in \Lambda^0(P, \mathcal{V})$, $\phi$ é automaticamente horizontal, logo as noções de 0-forma pseudotensorial e tensorial coincidem. Em geral, para uma $k$-forma, $k \geq 1$, isto não é verdade. Por exemplo, se $\boldsymbol{\omega} \in \Lambda^1(P, \mathfrak{g})$ é uma conexão, $\boldsymbol{\omega}$ é pseudotensorial do tipo* Ad *mas não é tensorial. A curvatura de qualquer conexão é tensorial do tipo* Ad.

**Definição 8.** *Um **campo de matéria do tipo $\rho$ em** $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} X$ é uma aplicação $\phi \in \Lambda^0_\rho(P, \mathcal{V})$.*

**Exemplo 4.** *Se $\mathcal{V} = \mathfrak{g}$ e $\rho = \mathrm{Ad}$, $\phi$ diz-se um **campo de Higgs**. Se $\mathcal{V} = \mathbb{C}$, $\phi$ diz-se um **campo escalar complexo**. Se $\mathcal{V} = \mathbb{C}^2$, $\phi$ diz-se uma **função de onda com 2 componentes**.*

## 4.2 Derivada covariante de formas tensoriais

**Lema 4.** *Se $\boldsymbol{\varphi} \in \Lambda^k_\rho(P, \mathcal{V})^{\mathrm{PT}}$, então $d\boldsymbol{\varphi} \in \Lambda^k_\rho(P, \mathcal{V})^{\mathrm{PT}}$.*

*Demonstração.* Por hipótese, $\boldsymbol{\varphi}$ satisfaz $(\sigma_g)^*\boldsymbol{\varphi} = g^{-1} \cdot \boldsymbol{\varphi}$ para todo o $g \in G$. Como $d$ comuta com o pullback e a acção de $G$ em $\mathcal{V}$ é linear, temos

$$(\sigma_g)^*(d\boldsymbol{\varphi}) = d(\sigma_g^*\boldsymbol{\varphi}) = d(g^{-1} \cdot \boldsymbol{\varphi}) = g^{-1} \cdot d\boldsymbol{\varphi}.$$

□

O lema anterior garante, em particular, que a derivada exterior de uma forma tensorial é pseudotensorial, mas não é necessariamente horizontal (e por isso pode nao ser tensorial).

Para obtermos um operador de derivação $D \colon \Lambda^k_\rho(P, \mathcal{V}) \to \Lambda^{k+1}_\rho(P, \mathcal{V})$, é necessário introduzir uma conexão em $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} X$. Fixemos então uma conexão $\boldsymbol{\omega}$ em $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} X$. Antes de definirmos o operador $D$ vamos reformular as definições 4 e 5, introduzidas na secção 3.2, para o caso de $k$-formas diferenciais em $P$ com valores em $\mathcal{V}$, pseudotensoriais do tipo $\rho$.

**Definição 9.** *Se $\boldsymbol{\varphi} \in \Lambda^k_\rho(P, \mathcal{V})^{\mathrm{PT}}$, define-se $\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{H}} \in \Lambda^k(P, \mathcal{V})$ por*

$$\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_k) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{H}}, \ldots, \boldsymbol{X}_k^{\mathrm{H}}),$$

*onde $\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{H}}, \ldots, \boldsymbol{X}_k^{\mathrm{H}}$ são as componentes horizontais de $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_k \in \mathfrak{X}(P)$.*

Note-se que $\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{H}}$ é tensorial do tipo $\rho$ pois é horizontal por definição e verifica

$$\begin{aligned}
((\sigma_g)^*\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{H}})(\boldsymbol{X}_1,\ldots,\boldsymbol{X}_k) &= \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{H}}((\sigma_g)_*\boldsymbol{X}_1,\ldots,(\sigma_g)_*\boldsymbol{X}_k) \\
&= \boldsymbol{\varphi}(((\sigma_g)_*\boldsymbol{X}_1)^{\mathrm{H}},\ldots,((\sigma_g)_*\boldsymbol{X}_k)^{\mathrm{H}}) \\
&= \boldsymbol{\varphi}((\sigma_g)_*\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{H}},\ldots,(\sigma_g)_*\boldsymbol{X}_k^{\mathrm{H}}) \\
&= (\sigma_g^*\boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{H}},\ldots,\boldsymbol{X}_k^{\mathrm{H}}) \\
&= g^{-1}\cdot\boldsymbol{\varphi}(X_1^{\mathrm{H}},\ldots,\boldsymbol{X}_k^{\mathrm{H}}) \\
&= g^{-1}\cdot\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{X}_1,\ldots,\boldsymbol{X}_k).
\end{aligned}$$

**Teorema 7.** *Seja $\varphi\in\Lambda^k_\rho(P,\mathcal{V})^{\mathrm{PT}}$. A* ***derivada covariante de $\boldsymbol{\varphi}$*** *definida por*

$$d^{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\varphi}=(d\boldsymbol{\varphi})^{\mathrm{H}}$$

*é uma $(k+1)$-forma tensorial do tipo $\rho$. Em particular*

$$d^{\boldsymbol{\omega}}\colon\Lambda^k_\rho(P,\mathcal{V})\to\Lambda^{k+1}_\rho(P,\mathcal{V}).$$

*Demonstração.* $d^{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\varphi}$ é claramente horizontal por definição. Pelo lema 4 e pela observação anterior, $d^{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\varphi}$ é pseudotensorial do tipo $\rho$, logo $d^{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\varphi}$ é tensorial. □

Gostariamos de ter uma fórmula explícita para o operador de derivação covariante $d^{\boldsymbol{\omega}}$ quando aplicado a elementos de $\Lambda^k_\rho(P,\mathcal{V})$. Para o conseguirmos vamos introduzir um novo produto exterior entre formas com valores em $\mathfrak{g}$ e formas com valores em $\mathcal{V}$.

Consideremos a aplicação bilinear

$$\begin{array}{rccl}
\rho_3\colon & \mathfrak{g}\times\mathcal{V} & \to & \mathcal{V} \\
& (A,v) & \mapsto & \rho_3(A,v)=\frac{d}{dt}\,\exp(tA)\cdot v\,|_{t=0}\,.
\end{array}$$

**Observação 9.** *Se $\rho=\mathrm{Ad}$,*

$$\rho_3(A,B)=\frac{d}{dt}\,\mathrm{Ad}_{\exp(tA)}(B)\,|_{t=0}=[A,B]$$

*para todo o $A,B\in\mathfrak{g}$.*

Se $\boldsymbol{\alpha} \in \Lambda^k(P, \mathfrak{g})$ e $\boldsymbol{\varphi} \in \Lambda^l(P, \mathcal{V})$, define-se o $\rho_3$-**produto exterior** $\boldsymbol{\alpha} \wedge_{\rho_3} \boldsymbol{\varphi}$ por

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{\alpha} \wedge_{\rho_3} \boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_{k+l}) = \\
&= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \rho_3 \left(\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{X}_{\sigma(1)}, \ldots, \boldsymbol{X}_{\sigma(k)}),\, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X}_{\sigma(k+1)}, \ldots, \boldsymbol{X}_{\sigma(k+l)})\right), \quad (4.1)
\end{aligned}
$$

onde $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_{k+l} \in \mathfrak{X}(P)$ e a soma é sobre as permutações $\sigma \in S_{k+l}$ de $\{1, \ldots, k+l\}$. Denotamos $\boldsymbol{\alpha} \wedge_{\rho_3} \boldsymbol{\varphi}$ por $\boldsymbol{\alpha} \dot{\wedge} \boldsymbol{\varphi}$.

**Observação 10.** *Se $\rho = \mathrm{Ad}$, então $\boldsymbol{\alpha} \dot{\wedge} \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\alpha} \wedge_{\rho_1} \boldsymbol{\varphi} = [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\varphi}]$, onde $\wedge_{\rho_1}$ representa o $\rho_1$-produto exterior do exemplo 1.*

**Teorema 8.** *Se $\boldsymbol{\varphi} \in \Lambda^k_\rho(P, \mathcal{V})$, então*

$$d^{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{\varphi} = d\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\omega} \dot{\wedge} \boldsymbol{\varphi}. \tag{4.2}$$

*Demonstração.* [Bl, pp. 44] □

**Corolário 1.** *Se $\boldsymbol{\varphi} \in \Lambda^k_{\mathrm{Ad}}(P, \mathfrak{g})$, então*

$$d^{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{\varphi} = d\boldsymbol{\varphi} + [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\varphi}]. \tag{4.3}$$

**Observação 11.** *O corolário anterior não se aplica à conexão $\boldsymbol{\omega}$ pois $\boldsymbol{\omega}$ não é tensorial do tipo $\mathrm{Ad}$. Contudo, podemos aplicar o corolário 1 à curvatura $\boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{\omega}} \in \Lambda^2_{\mathrm{Ad}}(P, \mathfrak{g})$ e obter $d^{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{\omega}} = d\boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{\omega}}] = 0$, pela identidade de Bianchi.*

**Observação 12.** *Se $\phi \in \Lambda^0_\rho(P, \mathcal{V})$ é um campo de matéria do tipo $\rho$, então*

$$d^{\boldsymbol{\omega}} \phi = d\phi + \boldsymbol{\omega} \dot{\wedge} \phi \in \Lambda^1_\rho(P, \mathcal{V}), \tag{4.4}$$

*ou mais explicitamente*

$$(d^{\boldsymbol{\omega}} \phi)(\boldsymbol{X}) = d\phi(\boldsymbol{X}) + \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{X})\phi, \qquad \forall \boldsymbol{X} \in \mathfrak{X}(P). \tag{4.5}$$

# Capítulo 5

# Teorias de Gauge Clássicas

Neste capítulo iremos utilizar as estruturas matemáticas introduzidas nos capítulos anteriores, para descrever, de uma forma geométrica, as teorias de gauge clássicas[1].

Começamos por introduzir um formalismo geral aplicável a qualquer teoria de gauge.

## 5.1 Formalismo geral

Os ingredientes matemáticos necessários para descrever, ao nível clássico, a interacção de um campo de matéria com um campo de gauge são:

1. Uma variedade orientável $X$, com orientação $\mu$ e equipada com uma métrica pseudo-Riemanniana $\boldsymbol{g}$.

   **Observação 13.** *Como exemplos temos o espaço Euclideano $\mathbb{R}^n$, o espaço de Minkowski $\mathbb{R}^{1,3}$, as esferas $S^n$, etc. As partículas "vivem" em $X$.*

2. Um espaço vectorial real $\mathcal{V}$ equipado com um produto interno $h$.

   **Observação 14.** *O campo de matéria que descreve a partícula (de matéria) toma valores em $\mathcal{V}$. A escolha de $\mathcal{V}$ depende da estrutura*

[1]Estamos a usar o adjectivo "clássico" no sentido "após a primeira quantização". Uma teoria de gauge clássica é uma teoria de campo clássica, onde há interacção entre campos de gauge (i.e. conexões em fibrados principais) e campos de matéria. Os campos descrevem fisicamente as partículas a eles associados.

*interna da partícula em causa e por essa razão, $\mathcal{V}$ chama-se o **espaço interno**. Como exemplos típicos temos $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^2$, $\mathbb{C}^4$ ou a álgebra de Lie de um grupo de Lie.*

3. Um grupo de Lie $G$ e uma representação $\rho\colon G \to GL(\mathcal{V})$, ortogonal relativamente ao produto interno $h$ em $\mathcal{V}$, i.e.

$$h(g \cdot v, g \cdot w) = h(v, w),$$

para todo o $g \in G$ e todo o $v, w \in \mathcal{V}$, onde $g \cdot v \equiv \rho(g)v$.

4. Um $G$-fibrado principal sobre $X$, $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} X$, uma conexão $\boldsymbol{\omega}$ em $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} X$ com curvatura $\boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{\omega}}$ e um campo de matéria do tipo $\rho$, $\phi\colon P \to \mathcal{V}$, em $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} X$.

**Observação 15.** *Em cada $x \in X$, a fibra $\pi^{-1}(x)$ representa o conjunto de todos os referenciais do espaço interno $\mathcal{V}$. No referencial $p \in \pi^{-1}(x)$, o estado interno da partícula é dado por $\phi(p)$. Se usármos outro referencial $p \cdot g \in \pi^{-1}(x)$, $g \in G$, o estado interno da partícula passa a ser descrito por $\phi(p \cdot g) = g^{-1} \cdot \phi(p)$, pois $\phi \in \Lambda^0_\rho(P, \mathcal{V})$. Uma gauge local $s\colon V \to \pi^{-1}(V)$ representa uma escolha "suave" de referenciais do espaço interno $\mathcal{V}$ num subconjunto aberto $V \subset X$, relativamente à qual é possível medir os valores do campo de matéria $\phi$ em todos os pontos $x \in V$.*

*A curvatura $\boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{\omega}}$ representa fisicamente o campo de gauge responsável pela interacção com a matéria, enquanto que a conexão $\boldsymbol{\omega}$ é uma quantidade sem significado físico. Ambas estão ligadas pela equação de estrutura de Cartan. Além disso, a curvatura $\boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{\omega}}$ satisfaz um constrangimento adicional, dado pela identidade de Bianchi. Esta identidade tem um carácter cinemático e está associada à forma como se modela um campo de gauge em termos geométricos. Veremos que, no caso do Electromagnetismo ($G = U(1), X = \mathbb{R}^{1,3}$), a identidade de Bianchi é equivalente às equações de Maxwell*

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0, \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0.$$

*Os únicos campos de matéria que interagem com o campo de gauge são os campos correspondentes a partículas com carga. O campo de matéria* *associado a uma partícula carregada com spin $s \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots\}$, tem $2s+1$ componentes complexas. O caso mais simples corresponde a $s = 0$ (e.g. o mesão $\pi^-$ na teoria do Electromagnetismo), onde $\phi \colon P \to \mathbb{C}$. Estudaremos este caso em mais detalhe na secção 5.8. Para $s > 0$ a situação é mais delicada e é necessário introduzir outro fibrado principal sobre $X$. Por exemplo, o campo de matéria que descreve o electrão ($s = 1/2$) é definido num certo $SL(2, \mathbb{C})$-fibrado principal sobre $X$ designado por **fibrado spinorial**. Para descrevermos a interacção do campo spinorial associado ao electrão com o campo de gauge, temos de "misturar", num certo sentido, o fibrado $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} X$ com o fibrado spinorial. Esta questão não será abordada neste texto. Para mais detalhes ver [Bl].*

5. Um funcional $S[\phi, \boldsymbol{\omega}]$, a **acção**, que contém toda a informação dinâmica da teoria e cujos pontos de estacionaridade descrevem as configurações $(\phi, \boldsymbol{\omega})$ com significado físico.

   **Observação 16.** *A acção é um funcional da forma*

$$S[\phi, \boldsymbol{\omega}] = \int_X \mathcal{L}(\phi, \boldsymbol{\omega})\ \mathbf{vol}, \tag{5.1}$$

   *onde $\mathcal{L}(\phi, \boldsymbol{\omega}) = \mathcal{L}_G(\boldsymbol{\omega}) + \mathcal{L}_M(\phi) + \mathcal{L}_I(\phi, \boldsymbol{\omega}) \in C^\infty(X)$ e* **vol** *é a forma de voluma canónica em $X$ induzida pela orientação $\mu$ e pela métrica $\boldsymbol{g}$ (ver secção 1.3). A função $\mathcal{L}_G$ só depende de $\boldsymbol{\omega}$ e está associada ao campo de gauge livre. Analogamente, $\mathcal{L}_M$ só depende de $\phi$ e está associada ao campo de matéria livre. O termo $\mathcal{L}_I$ descreve a interacção do campo de gauge com o campo de matéria e depende obviamente dos dois campos.*

   *A construcção destas funções tem por base o **princípio de invariância de gauge**, ou seja, a função $\mathcal{L}$ deve ser invariante sob transformações de gauge (ver secção 5.3).*

   *O Cálculo de Variações fornece condições necessárias e suficientes (**equações de Euler-Lagrange**) para encontrármos os pontos de estacionaridade de $S$. As equações de Euler-Lagrange são as equações do movimento da teoria.*

## 5.2 Transformações de gauge e espaço das conexões

Seja $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} X$ um $G$-fibrado principal sobre $X$.

**Definição 10.** *Um* ***automorfismo de*** $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} X$ *é um difeomorfismo* $f\colon P \to P$ *tal que* $f(p \cdot g) = f(p) \cdot g$ *para todo o* $p \in P$ *e todo o* $g \in G$*. Note-se que* $f$ *induz um difeomorfismo* $\overline{f}\colon X \to X$ *dado por* $\overline{f}(\pi(p)) = \pi(f(p))$*. Uma* ***transformação de gauge*** *é um automorfismo de* $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} X$ *tal que* $\overline{f} = \mathrm{id}_X$*.*

Denotamos por $\mathsf{GA}(P)$ o conjunto das transformações de gauge. $\mathsf{GA}(P)$ tem estrutura natural de grupo.

**Proposição 10.** *Seja* $\mathsf{C}(P, G) = \{\tau\colon P \to G \mid \tau(p \cdot g) = g^{-1}\tau(p)g\}$ *o grupo com composição* $(\tau \circ \tau')(p) = \tau(p)\tau'(p)$*. Então existe um isomorfismo natural* $\mathsf{C}(P, G) \simeq \mathsf{GA}(P)$*.*

*Demonstração.* Para $\tau \in \mathsf{C}(P, G)$, defina-se $f\colon P \to P$ por $f(p) = p \cdot \tau(p)$. Então $f(p \cdot g) = (p \cdot g) \cdot \tau(p \cdot g) = (p \cdot g) \cdot (g^{-1}\tau(p)g) = (p \cdot \tau(p)) \cdot g = f(p) \cdot g$ e $\overline{f}(\pi(p)) = \pi(p \cdot \tau(p)) = \pi(p)$, logo $\overline{f} = \mathrm{id}_X$ e portanto $f \in \mathsf{GA}(P)$.

Reciprocamente, seja $f \in \mathsf{GA}(P)$ e defina-se $\tau\colon P \to G$ pela relação $f(p) = p \cdot \tau(p)$. Então $(p \cdot g) \cdot \tau(p \cdot g) = f(p \cdot g) = f(p) \cdot g = p \cdot \tau(p)g \Rightarrow \tau(p \cdot g) = g^{-1}\tau(p)g \Rightarrow \tau \in \mathsf{C}(P, G)$.

Finalmente, se $f, f' \in \mathsf{GA}(P)$, temos $(f \circ f')(p) = f(p \cdot \tau'(p)) = f(p) \cdot \tau'(p) = p \cdot \tau(p)\tau'(p) = p \cdot (\tau \circ \tau')(p)$. ☐

**Proposição 11.** *Se* $f \in \mathsf{GA}(P)$ *e* $\boldsymbol{\omega}$ *é uma conexão em* $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} X$*, então* $f^*\boldsymbol{\omega}$ *também é uma conexão em* $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} X$*.*

*Demonstração.* Seja $A^\#$ o campo vectorial fundamental em $P$ induzido por $A \in \mathfrak{g}$. Então

$$\begin{aligned}
(f^*\boldsymbol{\omega})_p(A^\#_p) &= \boldsymbol{\omega}_{f(p)}(f_{*p}A^\#_p) \\
&= \boldsymbol{\omega}_{f(p)}(f_{*p}\frac{d}{dt}\, p \cdot \exp(tA)\ |_{t=0}) \\
&= \boldsymbol{\omega}_{f(p)}(\frac{d}{dt} f(p \cdot \exp(tA))\ |_{t=0}) \\
&= \boldsymbol{\omega}_{f(p)}(\frac{d}{dt}\, f(p) \cdot \exp(tA)\ |_{t=0}) \\
&= \boldsymbol{\omega}_{f(p)}(A^\#_{f(p)}) \\
&= A.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}(\sigma_g)^*(f^*\boldsymbol{\omega}) &= (f\circ\sigma_g)^*\boldsymbol{\omega}\\ &= (\sigma_g\circ f)^*\boldsymbol{\omega}\\ &= f^*(\sigma_g)^*\boldsymbol{\omega}\\ &= f^*(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\circ\boldsymbol{\omega})\\ &= \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\circ(f^*\boldsymbol{\omega}).\end{aligned}$$

□

**Proposição 12.** *Se $f\in \mathsf{GA}(P)$ e $\rho\colon G\to GL(\mathcal{V})$ é uma representação, então $f^*\colon \Lambda^k_\rho(P,\mathcal{V})\to\Lambda^k_\rho(P,\mathcal{V})$ é um isomorfismo linear para todo o $k=0,1,\ldots,\dim P$.*

*Demonstração.* Seja $\boldsymbol{\varphi}\in\Lambda^k_\rho(P,\mathcal{V})$. Pela proposição 11, $f_*A^\#=A^\#$, logo

$$(f^*\boldsymbol{\varphi})(A^\#,\ldots)=\boldsymbol{\varphi}(f_*A^\#,\ldots)=\boldsymbol{\varphi}(A^\#,\ldots)=0.$$

Além disso,

$$(\sigma_g)^*(f^*\boldsymbol{\varphi})=f^*(\sigma_g^*\boldsymbol{\varphi})=f^*(g^{-1}\cdot\boldsymbol{\varphi})=g^{-1}\cdot(f^*\boldsymbol{\varphi}),$$

e portanto $f^*\boldsymbol{\varphi}\in\Lambda^k_\rho(P,\mathcal{V})$. Como $f\colon P\to P$ é um difeomorfismo, $f^*$ é um isomorfismo linear. □

Seja $\mathcal{C}$ o conjunto das conexões em $G\hookrightarrow P\xrightarrow{\pi}X$. Claramente $\mathcal{C}\neq\Lambda^1_{\mathrm{Ad}}(P,\mathfrak{g})$. Contudo, $\mathcal{C}$ está relacionado com $\Lambda^1_{\mathrm{Ad}}(P,\mathfrak{g})$ através da seguinte

**Proposição 13.** *Se $\boldsymbol{\omega}\in\mathcal{C}$, então a aplicação*

$$\begin{aligned}\Lambda^1_{\mathrm{Ad}}(P,\mathfrak{g}) &\to \mathcal{C}\\ \boldsymbol{\varphi} &\mapsto \boldsymbol{\varphi}+\boldsymbol{\omega}\end{aligned}$$

*é uma bijecção.*

*Demonstração.* Para $A\in\mathfrak{g}$, $(\boldsymbol{\varphi}+\boldsymbol{\omega})(A^\#)=\boldsymbol{\varphi}(A^\#)+\boldsymbol{\omega}(A^\#)=A$. Além disso, $(\sigma_g)^*(\boldsymbol{\varphi}+\boldsymbol{\omega})=(\sigma_g)^*\boldsymbol{\varphi}+(\sigma_g)^*(\boldsymbol{\omega})=\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\circ(\boldsymbol{\varphi}+\boldsymbol{\omega})$, logo $\boldsymbol{\varphi}+\boldsymbol{\omega}\in\mathcal{C}$. Reciprocamente, se $\boldsymbol{\omega}'\in\mathcal{C}$, $\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\omega}'\in\Lambda^1_{\mathrm{Ad}}(P,\mathfrak{g})$. □

**Observação 17.** *Se $\boldsymbol{\varphi}\in\Lambda^1_{\mathrm{Ad}}(P,\mathfrak{g})$, a curva $\gamma\colon\mathbb{R}\to\mathcal{C}$, $\gamma(t)=\boldsymbol{\omega}+t\boldsymbol{\varphi}$ verifica $\dot\gamma(0)=\boldsymbol{\varphi}$, logo podemos pensar em $\Lambda^1_{\mathrm{Ad}}(P,\mathfrak{g})$ como o "espaço tangente $T_{\boldsymbol{\omega}}(\mathcal{C})$" à "variedade" $\mathcal{C}$ em $\boldsymbol{\omega}$.*

As proposições 11 e 12 dizem-nos que o grupo de transformações de gauge $\mathsf{GA}(P)$ age em $\mathcal{C}$ e em $\Lambda^k_\rho(P,\mathcal{V})$. Vamos reescrever esta acção em termos de $\mathsf{C}(P,G) \simeq \mathsf{GA}(P)$.

**Lema 5.** *Sejam $f \in \mathsf{GA}(P)$, $\tau \in \mathsf{C}(P,G)$, tais que $f(p) = p \cdot \tau(p)$, $\forall p \in P$. Se $X \in T_p(P)$, então*

$$f_{*p}(X) = (\sigma_{\tau(p)})_{*p}(X) + ((L_{\tau(p)^{-1}})_{*\tau(p)} \circ \tau_{*p}(X))^{\#}_{f(p)}. \tag{5.2}$$

*Demonstração.* Seja $\gamma\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to P$ uma curva tal que $\gamma(0) = p$, $\dot\gamma(0) = X$. Então

$$\begin{aligned}
f_{*p}(X) &= \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \,|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} \gamma(t) \cdot \tau(\gamma(t)) \,|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} p \cdot \tau(\gamma(t)) \,|_{t=0} + \frac{d}{dt} \gamma(t) \cdot \tau(p) \,|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} p \cdot \tau(p)\tau(p)^{-1}\tau(\gamma(t)) \,|_{t=0} + \frac{d}{dt} \sigma_{\tau(p)}(\gamma(t)) \,|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} f(p) \cdot \tau(p)^{-1}\tau(\gamma(t)) \,|_{t=0} + (\sigma_{\tau(p)})_{*p}(X) \\
&= ((L_{\tau(p)^{-1}})_{*\tau(p)} \circ \tau_{*p}(X))^{\#}_{f(p)} + (\sigma_{\tau(p)})_{*p}(X).
\end{aligned}$$

□

**Corolário 2.** *Se $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{C}$, $f \in \mathsf{GA}(P)$ e $\tau \in \mathsf{C}(P,G)$ tais que $f(p) = p \cdot \tau(p)$, $\forall p \in P$, então*

$$(f^*\boldsymbol{\omega})_p = (L_{\tau(p)^{-1}})_{*p} \circ \tau_{*p} + \mathrm{Ad}_{\tau(p)^{-1}} \circ \boldsymbol{\omega}_p. \tag{5.3}$$

*Demonstração.* Aplicando $\boldsymbol{\omega}_{f(p)}$ a ambos os membros da equação (5.2),

$$\begin{aligned}
(f^*\boldsymbol{\omega})_p(X) &= \boldsymbol{\omega}_{f(p)}(f_{*p}(X)) \\
&= (L_{\tau(p)^{-1}})_{*p} \circ \tau_{*p}(X) + (\sigma^*_{\tau(p)}\boldsymbol{\omega})_p(X) \\
&= (L_{\tau(p)^{-1}})_{*p} \circ \tau_{*p}(X) + \mathrm{Ad}_{\tau(p)^{-1}} \circ \boldsymbol{\omega}_p(X).
\end{aligned}$$

□

**Corolário 3.** *Se $\boldsymbol{\varphi} \in \Lambda^k_\rho(P,\mathcal{V})$, $f \in \mathsf{GA}(P)$ e $\tau \in \mathsf{C}(P,G)$ tais que $f(p) = p \cdot \tau(p)$, $\forall p \in P$, então*

$$(f^*\boldsymbol{\varphi})_p = \tau(p)^{-1} \cdot \boldsymbol{\varphi}_p. \tag{5.4}$$

*Demonstração.* Aplicando $\boldsymbol{\varphi}_{f(p)}$ a ambos os membros da equação (5.2),

$$\begin{aligned}(f^*\boldsymbol{\varphi})_p(X,\ldots) &= \boldsymbol{\varphi}_{f(p)}(f_{*p}(X),\ldots)\\ &= (\sigma^*_{\tau(p)}\boldsymbol{\varphi})_p(X,\ldots)\\ &= \tau(p)^{-1}\cdot\boldsymbol{\varphi}_p(X,\ldots).\end{aligned}$$

□

## 5.3 Lagrangeanos e invariância de gauge

Seja $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} X$ um $G$-fibrado principal sobre $X$ e $\rho\colon G \to GL(\mathcal{V})$ uma representação de $G$ no espaço vectorial real $\mathcal{V}$. Consideremos o conjunto

$$J(P,\mathcal{V}) = \{(p, v, \boldsymbol{\theta}_p) \mid p \in P, v \in \mathcal{V}, \boldsymbol{\theta}_p\colon T_p(P) \to \mathcal{V} \text{ linear}\}$$

É fácil ver que $J(P,\mathcal{V})$ tem estrutura natural de variedade.

**Definição 11.** *Um* ***Lagrangeano*** *é uma aplicação $L\colon J(P,\mathcal{V}) \to \mathbb{R}$ tal que*

$$L(p\cdot g, g^{-1}\cdot v, g^{-1}\cdot\boldsymbol{\theta}_p\circ(\sigma_{g^{-1}})_{*p\cdot g}) = L(p, v, \boldsymbol{\theta}_p)$$

*para todo o $g \in G$ e todo o $(p, v, \boldsymbol{\theta}_p) \in J(P,\mathcal{V})$.*

**Teorema 9.** *Um Lagrangeano $L\colon J(P,\mathcal{V}) \to \mathbb{R}$ induz uma única aplicação $\mathcal{L}_M\colon \Lambda^0_\rho(P,\mathcal{V}) \to C^\infty(X)$ dada por*

$$\mathcal{L}_M(\phi)(x) = L(p, \phi(p), d\phi_p),$$

*onde $\phi \in \Lambda^0_\rho(P,\mathcal{V})$, $x \in X$, $p \in \pi^{-1}(x)$. A função $\mathcal{L}_M(\phi)$ chama-se o* ***Lagrangeano do campo de matéria*** *$\phi$.*

*Demonstração.* Basta mostrar que $L(p, \phi(p), d\phi_p)$ é independente da escolha de $p \in \pi^{-1}(x)$. Como $\phi\circ\sigma_g = g^{-1}\cdot\phi$ temos $\phi_{*p\cdot g}\circ(\sigma_g)_{*p} = g^{-1}\cdot\phi_{*p}$, ou seja $d\phi_{p\cdot g} = g^{-1}\cdot d\phi_p\circ(\sigma_{g^{-1}})_{*p\cdot g}$. Então $L(p\cdot g, \phi(p\cdot g), d\phi_{p\cdot g}) = L(p\cdot g, g^{-1}\cdot\phi(p), g^{-1}\cdot d\phi_p\circ(\sigma_{g^{-1}})_{*p\cdot g}) = L(p, \phi(p), d\phi_p)$, onde se usou o facto de $L$ ser um Lagrangeano. □

**Definição 12.** *Um Lagrangeano $L\colon J(P,\mathcal{V}) \to \mathbb{R}$ diz-se* ***$G$-invariante*** *se satisfaz*

$$L(p, g\cdot v, g\cdot\boldsymbol{\theta}_p) = L(p, v, \boldsymbol{\theta}_p),$$

*para todo o $g \in G$ e todo o $(p, v, \boldsymbol{\theta}_p) \in J(P,\mathcal{V})$.*

**Teorema 10.** *Se* $L\colon J(P,\mathcal{V}) \to \mathbb{R}$ *é um Lagrangeano* $G$*-invariante, então* $\mathcal{L}_M(\phi)$ *não é necessariamente invariante de gauge.*

*Demonstração.* Sejam $f \in \mathsf{GA}(P)$, $\tau \in \mathsf{C}(P,G)$ tais que $f(p) = p \cdot \tau(p)$, $\forall p \in P$ e $\gamma\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to P$ uma curva tal que $\gamma(0) = p$, $\dot\gamma(0) = X$. Então

$$\begin{aligned} d(f^*\phi)_p(X) &= d(\tau^{-1}\cdot\phi)_p(X) \\ &= \frac{d}{dt}\tau(\gamma(t))^{-1}\cdot\phi(\gamma(t))\,|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\tau(p)^{-1}\cdot\phi(\gamma(t))\,|_{t=0} + \frac{d}{dt}\tau(\gamma(t))^{-1}\cdot\phi(p)\,|_{t=0} \\ &= \tau(p)^{-1}\cdot d\phi_p(X) + \frac{d}{dt}\tau(\gamma(t))^{-1}\tau(p)^{-1}\tau(p)\cdot\phi(p)\,|_{t=0} \\ &= \tau(p)^{-1}\cdot d\phi_p(X) + (R_{\tau(p)})_{*\tau(p)^{-1}}\circ i_{*\tau(p)}\circ\tau_{*p}(X)\cdot\phi(p), \end{aligned}$$

onde $i\colon G \to G$ denota a operação inversão no grupo $G$. Então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M(f^*\phi)(x) &= L(p,(f^*\phi)(p),d(f^*\phi)_p) \\ &= L(p,\tau(p)^{-1}\cdot\phi(p),\tau(p)^{-1}\cdot d\phi_p + \\ &+ (R_{\tau(p)})_{*\tau(p)^{-1}}\circ i_{*\tau(p)}\circ\tau_{*p}(\,.\,)\cdot(f^*\phi)(p)) \end{aligned}$$

e o segundo termo na terceira entrada de $L$ quebra a invariância de gauge de $\mathcal{L}_M$. □

O teorema anterior mostra que não é possível implementar o princípio de invariância de gauge quando só existe um campo de matéria. Este problema pode ser resolvido se adicionármos um campo de gauge, ou seja, introduzindo uma conexão $\boldsymbol{\omega}$ em $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} X$.

**Teorema 11.** *Se* $L\colon J(P,\mathcal{V}) \to \mathbb{R}$ *é um Lagrangeano* $G$*-invariante, então a aplicação*

$$\mathcal{L}_M + \mathcal{L}_I\colon \Lambda^0_\rho(P,\mathcal{V}) \times \mathcal{C} \to C^\infty(X)$$

*definida por*

$$(\mathcal{L}_M + \mathcal{L}_I)(\phi,\boldsymbol{\omega})(x) = L(p,\phi(p),(d^{\boldsymbol{\omega}}\phi)_p), \tag{5.5}$$

*está bem definida e é invariante de gauge.*

*Demonstração.* Para mostrármos que $\mathcal{L}_M + \mathcal{L}_I$ está bem definida basta mostrar que $L$ é independente da escolha de $p \in \pi^{-1}(x)$. Mas $(d^{\boldsymbol{\omega}}\phi)_{p\cdot g}\circ(\sigma_g)_{*p} = (\sigma_g)^*_{*p}(d^{\boldsymbol{\omega}}\phi)_{p\cdot g} = g^{-1}\cdot(d^{\boldsymbol{\omega}}\phi)_p$, logo $(d^{\boldsymbol{\omega}}\phi)_{p\cdot g} = g^{-1}\cdot(d^{\boldsymbol{\omega}}\phi)_p\circ(\sigma_{g^{-1}})_{*p\cdot g}$. Então

$L(p\cdot g, \phi(p\cdot g), (d^{\boldsymbol{\omega}}\phi)_{p\cdot g}) = L(p\cdot g, g^{-1}\cdot\phi(p), g^{-1}\cdot(d^{\boldsymbol{\omega}}\phi)_p\circ(\sigma_{g^{-1}})_{*p\cdot g}) = L(p,\phi(p),(d^{\boldsymbol{\omega}}\phi)_p)$, e portanto $\mathcal{L}_M+\mathcal{L}_I$ está bem definida. Note-se que só usámos o facto de $L$ ser um Lagrangeano. Mostremos agora que $\mathcal{L}_M+\mathcal{L}_I$ é invariante de gauge. Para $f\in\mathsf{GA}(P)$,

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_M+\mathcal{L}_I)(f^*\phi, f^*\boldsymbol{\omega})(x) &= L(p,(f^*\phi)(p),(d^{f^*\boldsymbol{\omega}}f^*\phi)_p)\\ &= L(p,\tau(p)^{-1}\cdot\phi(p), d(f^*\phi)_p+(f^*\boldsymbol{\omega}\dot{\wedge}f^*\phi)_p)\\ &= L(p,\tau(p)^{-1}\cdot\phi(p),(f^*d\phi)_p+(f^*(\boldsymbol{\omega}\dot{\wedge}\phi))_p)\\ &= L(p,\tau(p)^{-1}\cdot\phi(p),(f^*d^{\boldsymbol{\omega}}\phi)_p)\\ &= L(p,\tau(p)^{-1}\cdot\phi(p),\tau(p)^{-1}\cdot(d^{\boldsymbol{\omega}}\phi)_p)\\ &= L(p,\phi(p),(d^{\boldsymbol{\omega}}\phi)_p)\\ &= (\mathcal{L}_M+\mathcal{L}_I)(\phi,\boldsymbol{\omega})(x),\end{aligned}$$

e portanto $\mathcal{L}_M+\mathcal{L}_I$ é invariante de gauge. Note-se que usámos o facto de $L$ ser $G$-invariante. □

## 5.4 Princípio da acção mínima

A formulação moderna de qualquer teoria de campo clássica tem como ponto de partida um funcional $S$, a acção, que depende dos campos clássicos presentes na teoria. Em particular, uma teoria de gauge clássica tem uma acção da forma

$$S[\phi,\boldsymbol{\omega}] = \int_X \mathcal{L}(\phi,\boldsymbol{\omega})\ \mathbf{vol}, \tag{5.6}$$

onde $\mathcal{L}(\phi,\boldsymbol{\omega}) = \mathcal{L}_G(\boldsymbol{\omega})+\mathcal{L}_M(\phi)+\mathcal{L}_I(\phi,\boldsymbol{\omega})$ é o **Lagrangeano total**.

Na secção anterior construimos a função $(\mathcal{L}_M+\mathcal{L}_I)(\phi,\boldsymbol{\omega})$, correspondente ao campo de matéria e à sua interacção com o campo de gauge, impondo invariância sob transformações de gauge. A invariância de gauge no Lagrangeano total $\mathcal{L}(\phi,\boldsymbol{\omega})$ é então assegurada sse o termo $\mathcal{L}_G(\boldsymbol{\omega})$, correspondente ao campo de gauge livre, for também invariante de gauge. Para construirmos a função $\mathcal{L}_G(\boldsymbol{\omega})$ teremos de introduzir algumas estruturas geométricas adicionais no fibrado principal $G\hookrightarrow P\xrightarrow{\pi} X$ (ver secção 5.7).

Note-se que a equação (5.6) não está necessariamente bem definida pois se $X$ for uma variedade não compacta, o integral pode divergir. De forma a ultrapassar esta questão de carácter técnico, introduzimos o conceito de acção sobre um conjunto aberto com fecho compacto.

Seja $V \subset X$ um conjunto aberto tal que $\overline{V}$ é compacto. Define-se a **acção sobre** $V$ por

$$S_V[\phi, \boldsymbol{\omega}] = \int_V \mathcal{L}(\phi, \boldsymbol{\omega}) \ \mathbf{vol} \in \mathbb{R}.$$

Para $\sigma \in \Lambda^0_\rho(P, \mathcal{V})$ (respectivamente $\boldsymbol{\tau} \in \Lambda^1_{\mathrm{Ad}}(P, \mathfrak{g})$) define-se o **suporte projectado de $\sigma$ (respectivamente $\boldsymbol{\tau}$)** como o fecho do conjunto $\{\pi(p) \in X \mid \sigma(p) \neq 0\}$ (respectivamente $\{\pi(p) \in X \mid \boldsymbol{\tau}_p \neq 0\}$).

**Definição 13.** *O par $(\phi, \boldsymbol{\omega})$ é* ***estacionário relativamente a*** $\mathcal{L}$ *se para todos os conjuntos abertos $V \subset X$ com fecho compacto e $\sigma \in \Lambda^0_\rho(P, \mathcal{V})$, $\boldsymbol{\tau} \in \Lambda^1_{\mathrm{Ad}}(P, \mathfrak{g})$ com suportes projectados contidos em $V$, temos*

$$\frac{d}{dt} \int_V \mathcal{L}(\phi + t\sigma, \boldsymbol{\omega} + t\boldsymbol{\tau}) \ \mathbf{vol} \ |_{t=0} = 0. \tag{5.7}$$

*Equivalentemente, dizemos que $(\phi, \boldsymbol{\omega})$ satisfaz o* ***princípio da acção mínima****.*

Nas secções seguintes mostraremos que o par $(\phi, \boldsymbol{\omega})$ satisfaz o princípio da acção mínima sse obedece a um conjunto de equações diferenciais em $P$ (equações de Euler-Lagrange).

## 5.5 Digressão geométrica

Seja $\mathcal{V}$ um espaço vectorial real com produto interno $h$, $X$ uma variedade $n$-dimensional orientável, com orientação $\mu$ e equipada com uma métrica pseudo-Riemanniana $\boldsymbol{g}$, **vol** a forma de volume canónica em $X$ induzida por $\mu$ e $\boldsymbol{g}$ e $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} X$ um $G$-fibrado principal sobre $X$.

O produto interno $\boldsymbol{g}_x$ em $T_x(X)$ induz um produto interno $\boldsymbol{g}_p$ no subespaço horizontal $\mathrm{H}_p(P) \subset T_p(P)$, $p \in \pi^{-1}(x)$, através do isomorfismo linear $\pi_{*p}|_{\mathrm{H}_p(P)} \colon \mathrm{H}_p(P) \to T_x(X)$. Analogamente, induzimos uma forma de volume $\mathbf{vol}_p \in \Lambda^n(\mathrm{H}_p(P))$ a partir da forma de volume $\mathbf{vol}_x \in \Lambda^n(T_x(X))$. Temos então um operador de Hodge

$$\tilde{*}_p \colon \Lambda^k(\mathrm{H}_p(P)) \to \Lambda^{n-k}(\mathrm{H}_p(P)), \qquad k = 0, 1, \ldots, n,$$

definido por

$$\boldsymbol{\alpha}_p \wedge \tilde{*}_p \boldsymbol{\beta}_p = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\alpha}_p, \boldsymbol{\beta}_p) \ \mathbf{vol}_p$$

para $\boldsymbol{\alpha}_p, \boldsymbol{\beta}_p \in \Lambda^k(H_p(P))$, ou equivalentemente $\tilde{*}_p \circ (\pi_{*p})^* = (\pi_{*p})^* \circ *_x$.

Usando a definição anterior, podemos introduzir um operador de Hodge $\overline{*}$ na variedade $P$ da seguinte forma: para $\boldsymbol{\varphi} \in \Lambda^k_\rho(P, \mathcal{V})$ e $p \in P$, define-se $(\overline{*}\boldsymbol{\varphi})_p$ como a única extensão de $\tilde{*}_p(\boldsymbol{\varphi}_p \,|_{\mathrm{H}_p(P)})$ a uma $(n-k)$-forma em $T_p(P)$ com valores em $\mathcal{V}$ que se anula nos vectores verticais. Por outras palavras, $\overline{*}\boldsymbol{\varphi}$ é a única forma diferencial em $\Lambda^{n-k}_\rho(P, \mathcal{V})$ tal que $(\overline{*}\boldsymbol{\varphi})_p \,|_{\mathrm{H}_p(P)} = \tilde{*}_p(\boldsymbol{\varphi}_p \,|_{\mathrm{H}_p(P)})$.

**Proposição 14.** *Se $\boldsymbol{\varphi} \in \Lambda^k_\rho(P, \mathcal{V})$ e $s\colon V \to \pi^{-1}(V)$ é uma secção local, então $s^*(\overline{*}\boldsymbol{\varphi}) = {*}s^*(\boldsymbol{\varphi})$.*

*Demonstração.* [Bl, pp. 56]. □

Usando os produtos internos $\boldsymbol{g}_p$ em $\mathrm{H}_p(P)$ e $h$ em $\mathcal{V}$ podemos definir um produto interno $(\boldsymbol{g}_p h)$ em $\Lambda^k(\mathrm{H}_p(P), \mathcal{V})$, $k = 0, 1, \ldots, n$, tal como no apêndice (ver equação (A.13)) .

**Teorema 12.** *A aplicação*

$$(\boldsymbol{g}h)\colon \Lambda^k_\rho(P, \mathcal{V}) \times \Lambda^k_\rho(P, \mathcal{V}) \to C^\infty(X)$$

*dada por*

$$(\boldsymbol{g}h)(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})(x) = (\boldsymbol{g}_p h)(\boldsymbol{\alpha}_p \,|_{\mathrm{H}_p(P)}, \boldsymbol{\beta}_p \,|_{\mathrm{H}_p(P)}), \qquad p \in \pi^{-1}(x), \tag{5.8}$$

*está bem definida.*

*Demonstração.* [Bl, pp. 57]. □

**Observação 18.** *Note-se que existe também uma função*

$$(\boldsymbol{g}h)\colon \Lambda^k(X, \mathcal{V}) \times \Lambda^k(X, \mathcal{V}) \to C^\infty(X)$$

*dada por*

$$(\boldsymbol{g}h)(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})(x) = (\boldsymbol{g}_x h)(\boldsymbol{\alpha}_x, \boldsymbol{\beta}_x), \qquad x \in X. \tag{5.9}$$

**Definição 14.** *Se $\boldsymbol{\varphi} \in \Lambda^k_\rho(P, \mathcal{V})$, define-se a* ***coderivada covariante de*** *$\boldsymbol{\varphi}$ por*

$$\delta^{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\varphi} = (-1)^{n(k+1)+s+1}\, \overline{*}\, d^{\boldsymbol{\omega}}\, \overline{*}\boldsymbol{\varphi} \in \Lambda^{k-1}_\rho(P, \mathcal{V}), \tag{5.10}$$

*onde $s$ é o índice da métrica $\boldsymbol{g}$ em $X$.*

**Observação 19.** *Se $X$ é um espaço-tempo, então $n = 4$ e $s$ é ímpar, logo $\delta^{\boldsymbol{\omega}} = \overline{*}\, d^{\boldsymbol{\omega}}\, \overline{*}$.*

**Teorema 13.** *Sejam $V \subset X$ um conjunto aberto com fecho compacto, $\boldsymbol{\alpha} \in \Lambda^k_\rho(P, \mathcal{V})$ com suporte projectado contido em $V$ e $\boldsymbol{\beta} \in \Lambda^{k+1}_\rho(P, \mathcal{V})$. Então*

$$\int_V (\boldsymbol{g}h)(d^{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})\ \mathbf{vol} = \int_V (\boldsymbol{g}h)(\boldsymbol{\alpha}, \delta^{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\beta})\ \mathbf{vol}. \tag{5.11}$$

*Demonstração.* [Bl, pp. 58]. □

## 5.6 A corrente

Seja $L\colon J(P, \mathcal{V}) \to \mathbb{R}$ um Lagrangeano. Para $(p, v, \boldsymbol{\theta}_p) \in J(P, \mathcal{V})$ define-se $\nabla_3 L(p, v, \boldsymbol{\theta}_p) \in \Lambda^1(T_p(P), \mathcal{V})^{\mathrm{H}}$ pela equação

$$(\boldsymbol{g}_p h)(\nabla_3 L(p, v, \boldsymbol{\theta}_p), \boldsymbol{\beta}_p) = \frac{d}{dt} L(p, v, \boldsymbol{\theta}_p + t\boldsymbol{\beta}_p) \mid_{t=0}, \tag{5.12}$$

onde $\boldsymbol{\beta}_p \in \Lambda^1_\rho(T_p(P), \mathcal{V})$. Se $\phi \in \Lambda^0_\rho(P, \mathcal{V})$ definimos $\partial L/\partial(d^{\boldsymbol{\omega}}\phi) \in \Lambda^1(P, \mathcal{V})$ por

$$\left(\frac{\partial L}{\partial(d^{\boldsymbol{\omega}}\phi)}\right)_p = \nabla_3 L(p, \phi(p), (d^{\boldsymbol{\omega}}\phi)_p). \tag{5.13}$$

**Teorema 14.** $\frac{\partial L}{\partial(d^{\boldsymbol{\omega}}\phi)} \in \Lambda^1_\rho(P, \mathcal{V})$.

*Demonstração.* $\left(\frac{\partial L}{\partial(d^{\boldsymbol{\omega}}\phi)}\right)_p$ anula-se em $\mathrm{V}_p(P)$ por definição. Basta mostrar que $\partial L/\partial(d^{\boldsymbol{\omega}}\phi)$ é pseudotensorial do tipo $\rho$. Se $\boldsymbol{\beta} \in \Lambda^1_\rho(P, \mathcal{V})$, então

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{g}_p h)&\left(g \cdot \left(\frac{\partial L}{\partial(d^{\boldsymbol{\omega}}\phi)}\right)_{p\cdot g} \circ (\sigma_g)_{*p}, \boldsymbol{\beta}_p\right) = \\
&= (\boldsymbol{g}_{p\cdot g} h)\left(\left(\frac{\partial L}{\partial(d^{\boldsymbol{\omega}}\phi)}\right)_{p\cdot g}, g^{-1} \cdot \boldsymbol{\beta}_p \circ (\sigma_{g^{-1}})_{*p\cdot g}\right) \\
&= (\boldsymbol{g}_{p\cdot g} h)\left(\left(\frac{\partial L}{\partial(d^{\boldsymbol{\omega}}\phi)}\right)_{p\cdot g}, \boldsymbol{\beta}_{p\cdot g}\right) \\
&= (\boldsymbol{g}_{p\cdot g} h)(\nabla_3 L(p \cdot g, \phi(p \cdot g), (d^{\boldsymbol{\omega}}\phi)_{p\cdot g}), \boldsymbol{\beta}_{p\cdot g}) \\
&= \frac{d}{dt} L(p \cdot g, \phi(p \cdot g), (d^{\boldsymbol{\omega}}\phi + t\boldsymbol{\beta})_{p\cdot g}) \,|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} L(p \cdot g, g^{-1} \cdot \phi(p), g^{-1} \cdot (d^{\boldsymbol{\omega}}\phi + t\boldsymbol{\beta})_p \circ (\sigma_{g^{-1}})_{*p\cdot g}) \,|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} L(p, \phi(p), (d^{\boldsymbol{\omega}}\phi + t\boldsymbol{\beta})_p) \,|_{t=0} \\
&= (\boldsymbol{g}_p h)\left(\left(\frac{\partial L}{\partial(d^{\boldsymbol{\omega}}\phi)}\right)_p, \boldsymbol{\beta}_p\right),
\end{aligned}$$

onde se usaram os factos de $(\sigma_g)_{*p}\colon \mathrm{H}_p(P) \to \mathrm{H}_{p\cdot g}(P)$ ser uma isometria relativamente a $(\boldsymbol{g}_p h)$, $\rho\colon G \to GL(\mathcal{V})$ ser ortogonal relativamente a $h$ e portanto a $(\boldsymbol{g}_p h)$ e $L$ ser um Lagrangeano. $\square$

Para $(p, v, \boldsymbol{\theta}_p) \in J(P, \mathcal{V})$ define-se $\nabla_2 L(p, v, \boldsymbol{\theta}_p) \in \mathcal{V}$ pela equação

$$h(\nabla_2 L(p, v, \boldsymbol{\theta}_p), w) = \frac{d}{dt} L(p, v + tw, \boldsymbol{\theta}_p) \,|_{t=0}, \tag{5.14}$$

onde $w \in \mathcal{V}$. Se $\phi \in \Lambda^0_\rho(P, \mathcal{V})$ definimos $\partial L/\partial\phi \in \Lambda^0(P, \mathcal{V})$ por

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \phi}\right)_p = \nabla_2 L(p, \phi(p), (d^{\boldsymbol{\omega}}\phi)_p). \tag{5.15}$$

**Teorema 15.** $\frac{\partial L}{\partial \phi} \in \Lambda^0_\rho(P, \mathcal{V})$.

*Demonstração.*

$$
\begin{aligned}
& h\left(\left(\frac{\partial L}{\partial \phi}\right)_{p\cdot g}, w\right) = \\
&= h(\nabla_2 L(p\cdot g, \phi(p\cdot g), (d^{\boldsymbol{\omega}}\phi)_{p\cdot g}), w) \\
&= \frac{d}{dt} L(p\cdot g, g^{-1}\cdot\phi(p) + tw, (d^{\boldsymbol{\omega}}\phi)_{p\cdot g}) \mid_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} L(p\cdot g, g^{-1}\cdot(\phi(p) + tg\cdot w), g^{-1}\cdot(d^{\boldsymbol{\omega}}\phi)_p \circ (\sigma_{g^{-1}})_{*p\cdot g}) \mid_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} L(p, \phi(p) + tg\cdot w, (d^{\boldsymbol{\omega}}\phi)_p) \mid_{t=0} \\
&= h\left(\left(\frac{\partial L}{\partial \phi}\right)_p, g\cdot w\right) \\
&= h\left(g^{-1}\cdot\left(\frac{\partial L}{\partial \phi}\right)_p, w\right).
\end{aligned}
$$

$\square$

Seja $\kappa\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathbb{R}$ um produto interno ortogonal relativamente à representação adjunta $\mathrm{Ad}\colon G\to GL(\mathfrak{g})$. Como caso particular do teorema 12 temos a aplicação

$$(\boldsymbol{g}\kappa)\colon \Lambda^k_{\mathrm{Ad}}(P,\mathfrak{g})\times\Lambda^k_{\mathrm{Ad}}(P,\mathfrak{g})\to C^\infty(X). \tag{5.16}$$

**Definição 15.** *Se $\boldsymbol{\omega}\in\mathcal{C}$, $\phi\in\Lambda^0_\rho(P,\mathcal{V})$, define-se a **corrente** $\boldsymbol{J}^{\boldsymbol{\omega}}(\phi)\in\Lambda^1(P,\mathfrak{g})^{\mathrm{H}}$ pela equação*

$$(\boldsymbol{g}_p h)\left(\left(\frac{\partial L}{\partial(d^{\boldsymbol{\omega}}\phi)}\right)_p, (\boldsymbol{\tau}\dot{\wedge}\phi)_p\right) = (\boldsymbol{g}\kappa)(\boldsymbol{J}^{\boldsymbol{\omega}}(\phi)_p, \boldsymbol{\tau}_p), \tag{5.17}$$

*onde $\boldsymbol{\tau}\in\Lambda^1_{\mathrm{Ad}}(P,\mathfrak{g})$.*

**Observação 20.** *Pode mostrar-se que $\boldsymbol{J}^{\boldsymbol{\omega}}(\phi)\in\Lambda^1_{\mathrm{Ad}}(P,\mathfrak{g})$ (ver [Bl, pp. 66])*

**Teorema 16.** *Seja $\{e_1,\ldots,e_l\}$ uma base de $\mathfrak{g}$ e $(\kappa^{ij})$ a matriz inversa de $(\kappa_{ij}) = (\kappa(e_i,e_j))$. Então*

$$\boldsymbol{J}^{\boldsymbol{\omega}}(\phi)_p(X) = \kappa^{ij} h\left(\left(\frac{\partial L}{\partial(d^{\boldsymbol{\omega}}\phi)_p}\right)(X), e_i\cdot\phi(p)\right) e_j, \tag{5.18}$$

*para $X\in T_p(P)$.*

*Demonstração.* Seja $\boldsymbol{\tau}_p = \boldsymbol{\tau}_p^k \otimes e_k \in \Lambda^1_{\mathrm{Ad}}(T_p(P), \mathfrak{g})$. Então

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{g}_p\kappa)\left(\kappa^{ij}\, h\left(\left(\left(\frac{\partial L}{\partial(d^{\boldsymbol{\omega}}\phi)}\right)_p (X), e_i\cdot\phi(p)\right) e_j, \boldsymbol{\tau}_p^k(X) e_k\right) = \\
&= \; h\left(\left(\frac{\partial L}{\partial(d^{\boldsymbol{\omega}}\phi)}\right)_p (X), e_i\cdot\phi(p)\right)\boldsymbol{\tau}_p^i(X) \\
&= \; h\left(\left(\frac{\partial L}{\partial(d^{\boldsymbol{\omega}}\phi)}\right)_p (X), \boldsymbol{\tau}_p(X)\cdot\phi(p)\right) \\
&= \; (\boldsymbol{g}_p h)\left(\left(\frac{\partial L}{\partial(d^{\boldsymbol{\omega}}\phi)}\right)_p (X), (\boldsymbol{\tau}\dot{\wedge}\phi)_p(X)\right) \\
&= \; (\boldsymbol{g}_p\kappa)(\boldsymbol{J}^{\boldsymbol{\omega}}(\phi)_p(X), \boldsymbol{\tau}_p(X)).
\end{aligned}$$

□

**Teorema 17.** *A corrente $\boldsymbol{J}^{\boldsymbol{\omega}}(\phi)$ associada ao par $(\phi, \boldsymbol{\omega})$ satisfaz*

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{L}_M + \mathcal{L}_I)(\phi, \boldsymbol{\omega} + t\boldsymbol{\tau})\mid_{t=0} = (\boldsymbol{g}\kappa)(\boldsymbol{J}^{\boldsymbol{\omega}}(\phi), \boldsymbol{\tau}), \tag{5.19}$$

*para todo o $\boldsymbol{\tau} \in \Lambda^1_{\mathrm{Ad}}(P, \mathfrak{g})$.*

*Demonstração.* Para $p \in \pi^{-1}(x)$ temos

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\mathcal{L}_M + \mathcal{L}_I)(\phi, \boldsymbol{\omega} + t\boldsymbol{\tau})(x)\mid_{t=0} = \\
&= \; \frac{d}{dt} L(p, \phi(p), (d^{\boldsymbol{\omega}+t\boldsymbol{\tau}}\phi)_p)\mid_{t=0} \\
&= \; \frac{d}{dt} L(p, \phi(p), (d\phi + \boldsymbol{\omega}\dot{\wedge}\phi + t\boldsymbol{\tau}\dot{\wedge}\phi)_p)\mid_{t=0} \\
&= \; (\boldsymbol{g}_p h)(\nabla_3 L(p, \phi(p), (d^{\boldsymbol{\omega}}\phi)_p), (\boldsymbol{\tau}\dot{\wedge}\phi)_p) \\
&= \; (\boldsymbol{g}_p h)\left(\left(\frac{\partial L}{\partial(d^{\boldsymbol{\omega}}\phi)}\right)_p, (\boldsymbol{\tau}\dot{\wedge}\phi)_p\right) \\
&= \; (\boldsymbol{g}_p\kappa)(\boldsymbol{J}^{\boldsymbol{\omega}}(\phi)_p, \boldsymbol{\tau}_p) \\
&= \; (\boldsymbol{g}\kappa)(\boldsymbol{J}^{\boldsymbol{\omega}}(\phi), \boldsymbol{\tau})(x).
\end{aligned}$$

□

## 5.7 Equações do movimento

Antes de estabelecermos as equações do movimento, vamos introduzir o **Lagrangeano $\mathcal{L}_G$ associado ao campo de gauge livre**. A definição é a seguinte:

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{L}_G\colon & \mathcal{C} & \to & C^\infty(X) \\ & \boldsymbol{\omega} & \mapsto & \mathcal{L}_G(\boldsymbol{\omega}) = -\frac{1}{2}\,(\boldsymbol{g}\kappa)(\boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{\omega}},\boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{\omega}}), \end{array} \tag{5.20}$$

onde $(\boldsymbol{g}\kappa)$ é a aplicação (5.16) definida na secção anterior. O Lagrangeano total é então a aplicação

$$\mathcal{L}\colon \Lambda^0_\rho(P,\mathcal{V})\times\mathcal{C}\to C^\infty(X)$$

dada por

$$\mathcal{L}(\phi,\boldsymbol{\omega}) = -\frac{1}{2}\,(\boldsymbol{g}\kappa)(\boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{\omega}},\boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{\omega}}) + (\mathcal{L}_M+\mathcal{L}_I)(\phi,\boldsymbol{\omega}). \tag{5.21}$$

**Teorema 18.** *O par $(\phi,\boldsymbol{\omega})$ satisfaz o princípio da acção mínima sse são satisfeitas as equações*

$$\delta^{\boldsymbol{\omega}}\frac{\partial L}{\partial(d^{\boldsymbol{\omega}}\phi)}+\frac{\partial L}{\partial\phi}=0, \tag{5.22}$$

$$\delta^{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{\omega}}=\boldsymbol{J}^{\boldsymbol{\omega}}(\phi). \tag{5.23}$$

*Demonstração.* Seja $V\subset X$ um conjunto aberto com fecho compacto, $\sigma\in\Lambda^0_\rho(P,\mathcal{V})$, $\boldsymbol{\tau}\in\Lambda^1_{\mathrm{Ad}}(P,\mathfrak{g})$ com suportes projectados contidos em $V$ e $\boldsymbol{\Omega}_t\equiv\boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{\omega}+t\boldsymbol{\tau}}$. Então

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\Omega}_t\,|_{t=0}=d\boldsymbol{\tau}+[\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\tau}]=d^{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\tau},$$

e portanto

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_V \mathcal{L}(\phi+t\sigma,\boldsymbol{\omega}+t\boldsymbol{\tau})\ \mathbf{vol}\ |_{t=0}= \\
&= \quad -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_V (\boldsymbol{g}\kappa)(\boldsymbol{\Omega}_t,\boldsymbol{\Omega}_t)\ \mathbf{vol}\ |_{t=0} \\
&\qquad +\frac{d}{dt}\int_V (\mathcal{L}_M+\mathcal{L}_I)(\phi+t\sigma,\boldsymbol{\omega}+t\boldsymbol{\tau})\ \mathbf{vol}\ |_{t=0} \\
&= \quad -\int_V (\boldsymbol{g}\kappa)(\boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{\omega}},d^{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\tau})\ \mathbf{vol}+\frac{d}{dt}\int_V (\mathcal{L}_M+\mathcal{L}_I)(\phi+t\sigma,\boldsymbol{\omega})\ \mathbf{vol}\ |_{t=0} \\
&\qquad +\frac{d}{dt}\int_V (\mathcal{L}_M+\mathcal{L}_I)(\phi,\boldsymbol{\omega}+t\boldsymbol{\tau})\ \mathbf{vol}\ |_{t=0} \\
&= \quad -\int_V (\boldsymbol{g}\kappa)(\delta^{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{\omega}},\boldsymbol{\tau})\ \mathbf{vol}+\frac{d}{dt}\int_V (\mathcal{L}_M+\mathcal{L}_I)(\phi+t\sigma,\boldsymbol{\omega})\ \mathbf{vol}\ |_{t=0} \\
&\qquad +\int_V (\boldsymbol{g}\kappa)(\boldsymbol{J}^{\boldsymbol{\omega}}(\phi),\boldsymbol{\tau})\ \mathbf{vol}\,.
\end{aligned}
$$

onde usámos os teoremas 13 e 17. Analisemos o segundo termo da equação acima. Para $\pi(p)=x$,

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\mathcal{L}_M+\mathcal{L}_I)(\phi+t\sigma,\boldsymbol{\omega})(x)= \\
&\quad =\frac{d}{dt}L(p,\phi(p)+t\sigma(p),(d^{\boldsymbol{\omega}}\phi+td^{\boldsymbol{\omega}}\sigma)_p)\ |_{t=0} \\
&\quad =\frac{d}{dt}L(p,\phi(p),(d^{\boldsymbol{\omega}}\phi+td^{\boldsymbol{\omega}}\sigma)_p)\ |_{t=0}+\frac{d}{dt}L(p,\phi(p)+t\sigma(p),(d^{\boldsymbol{\omega}}\phi)_p)\ |_{t=0} \\
&\quad =(\boldsymbol{g}_p h)\left(\left(\frac{\partial L}{\partial(d^{\boldsymbol{\omega}}\sigma)}\right)_p,(d^{\boldsymbol{\omega}}\phi)_p\right)+h\left(\left(\frac{\partial L}{\partial\phi}\right)_p,\sigma(p)\right).
\end{aligned}
$$

Substituindo no integral vem

$$
\begin{aligned}
&\int_V (\boldsymbol{g}h)\left(\frac{\partial L}{\partial(d^{\boldsymbol{\omega}}\phi)},d^{\boldsymbol{\omega}}\sigma\right)\ \mathbf{vol}+\int_V h\left(\frac{\partial L}{\partial\phi},\sigma\right)\ \mathbf{vol}= \\
&\quad =\int_V h\left(\delta^{\boldsymbol{\omega}}\frac{\partial L}{\partial(d^{\boldsymbol{\omega}}\phi)}+\frac{\partial L}{\partial\phi},\sigma\right)\ \mathbf{vol}\,.
\end{aligned}
$$

Temos então

$$\frac{d}{dt}\int_V \mathcal{L}(\phi + t\sigma, \boldsymbol{\omega} + t\boldsymbol{\tau})\ \mathbf{vol}\,|_{t=0} =$$

$$\int_V h\left(\delta^{\boldsymbol{\omega}}\frac{\partial L}{\partial(d^\omega\phi)} + \frac{\partial L}{\partial\phi}, \sigma\right)\ \mathbf{vol} + \int_V (\boldsymbol{g}\kappa)(\boldsymbol{J}^{\boldsymbol{\omega}}(\phi) - \delta^{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{\omega}}, \boldsymbol{\tau})\ \mathbf{vol}\,.$$

□

Uma consequência da equação do movimento (5.23) é a "equação da continuidade generalizada". Para mostramos este resultado necessitamos de alguns lemas auxiliares.

**Lema 6.** *Se* $\boldsymbol{\varphi} \in \Lambda^k_\rho(P, \mathcal{V})$ *e* $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{C}$, *então*

$$d^{\boldsymbol{\omega}}(d^{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\varphi}) = \boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{\omega}}\dot{\wedge}\boldsymbol{\varphi}.$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} d^{\boldsymbol{\omega}}(d^{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\varphi}) &= d(d\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\omega}\dot{\wedge}\boldsymbol{\varphi}) + \boldsymbol{\omega}\dot{\wedge}(d\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\omega}\dot{\wedge}\boldsymbol{\varphi}) \\ &= d\boldsymbol{\omega}\dot{\wedge}\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\omega}\dot{\wedge}(\boldsymbol{\omega}\dot{\wedge}\boldsymbol{\varphi}). \end{aligned}$$

Usando as definições de $\dot{\wedge}$ e $[\,,\,]$ é fácil mostrar que

$$\boldsymbol{\omega}\dot{\wedge}(\boldsymbol{\omega}\dot{\wedge}\boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{2}\,[\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}]\dot{\wedge}\boldsymbol{\varphi}.$$

□

**Lema 7.** *Se* $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\tau} \in \Lambda^k_{\mathrm{Ad}}(P, \mathfrak{g})$, *então* $[\boldsymbol{\tau}, \bar{*}\boldsymbol{\varphi}] = -[\boldsymbol{\varphi}, \bar{*}\boldsymbol{\tau}]$.

*Demonstração.* Seja $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}^i \otimes T_i$, $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^j \otimes T_j$, onde $\{T_i\}$ é uma base de $\mathfrak{g}$. Então

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\tau}, \bar{*}\boldsymbol{\varphi}] &= \boldsymbol{\tau}^j \wedge \bar{*}\boldsymbol{\varphi}^i \otimes [T_j, T_i] \\ &= \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\tau}^j, \boldsymbol{\varphi}^i)\,\mathbf{vol}\otimes[T_j, T_i] \\ &= -\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\varphi}^i, \boldsymbol{\tau}^j)\,\mathbf{vol}\otimes[T_i, T_j] \\ &= -\boldsymbol{\varphi}^i \wedge \bar{*}\boldsymbol{\tau}^j \otimes [T_i, T_j] \\ &= -[\boldsymbol{\varphi}, \bar{*}\boldsymbol{\tau}]. \end{aligned}$$

□

**Lema 8.** *$\delta^{\boldsymbol{\omega}}(\delta^{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{\omega}}) = 0$.*

*Demonstração.*

$$\begin{aligned}
\delta^{\boldsymbol{\omega}}(\delta^{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{\omega}}) &= \pm\bar{*}d^{\boldsymbol{\omega}}\,\bar{*}\,\bar{*}d^{\boldsymbol{\omega}}\,\bar{*}\boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{\omega}} \\
&= \pm\bar{*}d^{\boldsymbol{\omega}}(d^{\boldsymbol{\omega}}\,\bar{*}\boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{\omega}}) \\
&= \pm\bar{*}([\boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{\omega}}, \bar{*}\boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{\omega}}]) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

onde usámos os dois lemas anteriores. □

**Corolário 4 (Equação da continuidade generalizada).** *Se $\delta^{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{J}^{\boldsymbol{\omega}}(\phi)$, então*

$$\delta^{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{J}^{\boldsymbol{\omega}}(\phi)) = 0. \tag{5.24}$$

## 5.8 Exemplos

Vimos que as **equações do movimento** para os campos $(\phi, \boldsymbol{\omega})$ numa teoria de gauge são dadas por

$$\delta^{\boldsymbol{\omega}}\frac{\partial L}{\partial(d^{\boldsymbol{\omega}}\phi)} + \frac{\partial L}{\partial\phi} = 0, \tag{5.25}$$

$$\delta^{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{J}^{\boldsymbol{\omega}}(\phi). \tag{5.26}$$

O campo $\boldsymbol{\omega}$ obedece ainda à **identidade de Bianchi**

$$d^{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{\omega}} = 0, \tag{5.27}$$

e a corrente $\boldsymbol{J}^{\boldsymbol{\omega}}(\phi)$ satisfaz a **equação da continuidade generalizada**

$$\delta^{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{J}^{\boldsymbol{\omega}}(\phi) = 0. \tag{5.28}$$

Nesta secção iremos escrever as equações (5.25), (5.26), (5.27) e (5.28) em três teorias de gauge particulares. Todos os exemplos serão formulados no espaço de Minkowski $X = \mathbb{R}^{1,3}$ com métrica $(\eta_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(1\ -1\ -1\ -1)$ e coordenadas $(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (t, x, y, z)$.

### 5.8.1 Teoria de Yang-Mills sem matéria

Seja $G$ um grupo de Lie não abeliano (e.g. $SU(2)$) e $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} X$ um $G$-fibrado principal sobre $X$.

A ausência de matéria implica que $L = \boldsymbol{J}^{\boldsymbol{\omega}}(\phi) = 0$, logo as únicas equações que restam são

$$\begin{cases} \delta^{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{\omega}} = 0, \\ d^{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{\omega}} = 0. \end{cases} \tag{5.29}$$

Seja $s\colon V \to \pi^{-1}(V)$ uma secção local de $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} X$. Usando a proposição 14 e a observação 19, a equação do movimento escreve-se

$$\begin{aligned} s^*(\delta^{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{\omega}}) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad s^*(\bar{*}\, d^{\boldsymbol{\omega}}\, \bar{*}\, \boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{\omega}}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad {}^*(s^* d^{\boldsymbol{\omega}}\, \bar{*}\, \boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{\omega}}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad d^*\boldsymbol{\mathcal{F}} + [\boldsymbol{\mathcal{A}}, {}^*\boldsymbol{\mathcal{F}}] = 0, \end{aligned} \tag{5.30}$$

onde $\boldsymbol{\mathcal{F}} = s^*\boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{\omega}}$, $\boldsymbol{\mathcal{A}} = s^*\boldsymbol{\omega}$ são as expressões locais para a curvatura e a conexão, respectivamente.

A identidade de Bianchi é dada por

$$\begin{aligned} s^*(d^{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{\omega}}) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad {}^*(d\boldsymbol{\mathcal{F}} + [\boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mathcal{F}}]) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad d\boldsymbol{\mathcal{F}} + [\boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mathcal{F}}] = 0. \end{aligned} \tag{5.31}$$

### 5.8.2 Electromagnetismo puro

Seja $G = U(1)$ e $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} X$ um $G$-fibrado principal sobre $X$. Tal como no exemplo anterior, $L = \boldsymbol{J}^{\boldsymbol{\omega}}(\phi) = 0$, logo as únicas equações que restam são as equações (5.29). Localmente, como $G$ é abeliano, as equações (5.30) e (5.31) escrevem-se

$$\begin{cases} d^*\boldsymbol{\mathcal{F}} = 0, \\ d\boldsymbol{\mathcal{F}} = 0. \end{cases} \tag{5.32}$$

Como

$$\boldsymbol{\mathcal{F}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = -iF = -\frac{i}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu,$$

temos

$$\begin{cases} \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \\ \partial_{[\mu} F_{\alpha\beta]} = 0. \end{cases} \tag{5.33}$$

O contacto com o Electromagnetismo faz-se definindo o campo eléctrico $\boldsymbol{E} = E^i \partial_i$ e o campo magnético $\boldsymbol{B} = B^i \partial_i$ por

$$\begin{aligned} F_{i0} &= E^i, \\ F_{ij} &= \varepsilon_{ijk} B^k, \end{aligned}$$

onde $i, j, k = 1, 2, 3$. Então

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ E^2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ E^3 & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{B} - \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \boldsymbol{0}, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0, \end{cases} \tag{5.34}$$

$$\partial_{[\mu} F_{\alpha\beta]} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{E} + \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{0}, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0. \end{cases} \tag{5.35}$$

### 5.8.3 Electromagnetismo com matéria de spin 0

Sejam $G = U(1) = \{e^{i\alpha} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ e $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} X$ um $G$-fibrado principal sobre $X$, $\mathcal{V} = \mathbb{C}$ com produto interno $h\colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ dado por

$$h(z, w) = \frac{1}{2}(z\overline{w} + \overline{z}w),$$

e $\rho\colon U(1) \to GL(\mathbb{C})$ a representação de $U(1)$ em $\mathbb{C}$ dada por $\rho(e^{i\alpha})z \equiv e^{i\alpha} \cdot z = e^{i\alpha}z$. O campo de matéria de spin 0 é descrito por uma função $\phi\colon P \to \mathbb{C}$ tensorial do tipo $\rho$. Para

$$J(P, \mathbb{C}) = \{(p, z, \boldsymbol{\theta}_p) \mid p \in P, z \in \mathbb{C}, \boldsymbol{\theta}_p\colon T_p(P) \to \mathbb{C} \text{ linear}\}$$

constrói-se o Lagrangeano $G$-invariante

$$L(p, z, \boldsymbol{\theta}_p) = \frac{1}{2}(\eta_p h)(\boldsymbol{\theta}_p, \boldsymbol{\theta}_p) - \frac{1}{2}m^2 z\overline{z},$$

onde $\boldsymbol{\theta}_p \in \Lambda^1_\rho(T_p(P), \mathbb{C})$. Aplicando (5.12), (5.13), (5.14), (5.15) mostra-se que

$$\frac{\partial L}{\partial(d^{\boldsymbol{\omega}}\phi)} = d^{\boldsymbol{\omega}}\phi, \qquad \frac{\partial L}{\partial \phi} = -m^2\phi,$$

e portanto a equação (5.25) escreve-se

$$\delta^{\boldsymbol{\omega}}(d^{\boldsymbol{\omega}}\phi) - m^2\phi = 0. \tag{5.36}$$

Seja $\mathfrak{u}(1) = \{i\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ a álgebra de Lie de $U(1)$, com base $\{i\}$ e $\kappa\colon \mathfrak{u}(1) \times \mathfrak{u}(1) \to \mathbb{R}$ um produto interno Ad-invariante definido por $\kappa(i) = 1$. Então $(\kappa_{ij}) = (\kappa^{ij}) = 1$ e usando o teorema 16 mostra-se que

$$\boldsymbol{J}^{\boldsymbol{\omega}}(\phi) = h(d^{\boldsymbol{\omega}}\phi, i\phi)i \in \Lambda^1_{\mathrm{Ad}}(P, \mathbb{C}), \tag{5.37}$$

logo a equação (5.26) escreve-se

$$\delta^{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{\omega}} = h(d^{\boldsymbol{\omega}}\phi, i\phi)i. \tag{5.38}$$

Seja $s\colon V \to \pi^{-1}(V)$ uma secção local de $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} X$, $\phi' \equiv s^*\phi \in \Lambda^0(V, \mathbb{C})$ e

$$\begin{array}{rcl} -i\boldsymbol{A} & \equiv & \boldsymbol{\mathcal{A}} = s^*\boldsymbol{\omega} \in \Lambda^1(V, \mathfrak{u}(1)), \\ -i\boldsymbol{F} & \equiv & \boldsymbol{\mathcal{F}} = s^*\boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{\omega}} \in \Lambda^2(V, \mathfrak{u}(1)), \\ -i\boldsymbol{J} & \equiv & \boldsymbol{\mathcal{J}} = s^*\boldsymbol{J}^{\boldsymbol{\omega}}(\phi) \in \Lambda^1(V, \mathfrak{u}(1)) \end{array}$$

Usando a proposição 14 e a observação 19 é fácil escrever a equação (5.36) como

$$^*d^*d\phi' - i^*d^*(\boldsymbol{A}\phi') + i\eta(\boldsymbol{A}, d\phi') + \eta(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}\phi') - m^2\phi' = 0.$$

Como $^*d^*d = \Box = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$ e $^*d^*(\boldsymbol{A}\phi') = -\eta^{\mu\nu}\partial_\mu(A_\nu\phi')$ temos

$$\Box\phi' - i\eta^{\mu\nu}\partial_\mu(A_\nu\phi') - i\eta^{\mu\nu}A_\nu\partial_\mu\phi' - \eta^{\mu\nu}A_\mu A_\nu\phi' + m^2\phi' = 0$$

ou ainda

$$(\partial_\mu - iA_\mu)(\partial^\mu - iA^\mu)\phi' + m^2\phi' = 0. \tag{5.39}$$

Note-se que se $\boldsymbol{A} = 0$ obtemos a **equação de Klein-Gordon**

$$(\Box + m^2)\phi' = 0. \tag{5.40}$$

Localmente, a corrente $\boldsymbol{J}^{\boldsymbol{\omega}}(\phi)$ escreve-se

$$\boldsymbol{\mathcal{J}} = \frac{1}{2}(\overline{\phi'}d\phi' - \phi' d\overline{\phi'}) + \boldsymbol{\mathcal{A}}\phi'\overline{\phi'}.$$

Como $\boldsymbol{\mathcal{J}} = \mathcal{J}_\mu dx^\mu = -iJ_\mu dx^\mu$, obtemos

$$J_\mu = \frac{i}{2}(\overline{\phi'}\partial_\mu\phi' - \phi'\partial_\mu\overline{\phi'}) + A_\mu\phi'\overline{\phi'}.$$

A equação (5.38) escreve-se então

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu. \tag{5.41}$$

Finalmente, a equação da continuidade generalizada fica

$$\begin{aligned} s^*(\delta^{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{J}^{\boldsymbol{\omega}}(\phi)) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad s^*(\bar{*}\, d^{\boldsymbol{\omega}}\, \bar{*}\boldsymbol{J}^{\boldsymbol{\omega}}(\phi)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad {}^*d^*\boldsymbol{\mathcal{J}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad d^*\boldsymbol{\mathcal{J}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \partial_\mu J^\mu = 0. \end{aligned} \tag{5.42}$$

# Apêndice A

# Digressão algébrica

## A.1 Álgebra multilinear

Sejam $\mathcal{E}, \mathcal{V}$ espaços vectoriais reais de dimensão $n$ e $m$ respectivamente, $\mathcal{E}^*$ o espaço dual de $\mathcal{E}$ e $r, k \in \mathbb{Z}_0^+$. Para $r, k > 0$ define-se o **espaço dos $(r,k)$-tensores em $\mathcal{E}$ com valores em $\mathcal{V}$** por

$$\mathcal{T}_k^r(\mathcal{E}, \mathcal{V}) = \{\, t\colon \underbrace{\mathcal{E}^* \times \ldots \times \mathcal{E}^*}_{r} \times \underbrace{\mathcal{E} \times \ldots \times \mathcal{E}}_{k} \to \mathcal{V} \mid t \text{ multilinear}\}.$$

Para $r = k = 0$ definimos $\mathcal{T}_0^0 = \mathcal{V}$. O conjunto $\mathcal{T}_k^r(\mathcal{E}, \mathcal{V})$ tem estrutura natural de espaço vectorial real com as operações usuais de soma e multiplicação por escalares.

Existem subespaços vectoriais de $\mathcal{T}_k^r(\mathcal{E}, \mathcal{V})$ particularmente interessantes. Por exemplo, $\mathcal{T}_0^r(\mathcal{E}, \mathcal{V})$ designa o **espaço dos $r$-tensores contravariantes em $\mathcal{E}$ com valores em $\mathcal{V}$** e $\mathcal{T}_k^0(\mathcal{E}, \mathcal{V})$ designa o **espaço dos $k$-tensores covariantes em $\mathcal{E}$ com valores em $\mathcal{V}$**. $\mathcal{T}_k^0(\mathcal{E}, \mathcal{V})$ contém ainda um subespaço definido por

$$\Lambda^k(\mathcal{E}, \mathcal{V}) = \{\, t \in \mathcal{T}_k^0(\mathcal{E}, \mathcal{V}) \mid t \text{ anti-simétrico}\},$$

a que chamamos o **espaço das $k$-formas em $\mathcal{E}$ com valores em $\mathcal{V}$**. Por convenção, quando $\mathcal{V} = \mathbb{R}$ denotamos $\Lambda^k(\mathcal{E}, \mathbb{R})$ por $\Lambda^k(\mathcal{E})$, denominado o **espaço das $k$-formas em $\mathcal{E}$**.

Se $\alpha \in \Lambda^k(\mathcal{E})$ e $\beta \in \Lambda^l(\mathcal{E})$ define-se o **produto exterior** $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^{k+l}(\mathcal{E})$

por

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, \ldots, v_{k+l}) = \\ = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \alpha(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)})\, \beta(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)}), \quad \text{(A.1)}$$

onde $v_1, \ldots, v_{k+l} \in \mathcal{E}$ e a soma é sobre as permutações $\sigma \in S_{k+l}$ de $\{1, \ldots, k+l\}$. Se $\alpha, \beta \in \Lambda^0(\mathcal{E})$ definimos $\alpha \wedge \beta = \alpha\beta$.

Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de $\mathcal{E}$ e $\{e^1, \ldots, e^n\}$ a correspondente base dual. Então, para cada $k = 1, \ldots, n$, $\{e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n\}$ é uma base de $\Lambda^k(\mathcal{E})$. Além disso, qualquer $\alpha \in \Lambda^k(\mathcal{E})$ pode escrever-se de forma única como

$$\alpha = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \alpha_{i_1 \ldots i_k} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k} = \frac{1}{k!}\, \alpha_{i_1 \ldots i_k} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}, \quad \text{(A.2)}$$

onde $\alpha_{i_1 \ldots i_k} = \alpha(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$. Em particular,

$$\dim \Lambda^k(\mathcal{E}) = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad \text{(A.3)}$$

O produto exterior de $\alpha \in \Lambda^k(\mathcal{E})$ e $\beta \in \Lambda^l(\mathcal{E})$ satisfaz

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha. \quad \text{(A.4)}$$

Ao espaço vectorial

$$\Lambda^*(\mathcal{E}) := \Lambda^0(\mathcal{E}) \oplus \Lambda^1(\mathcal{E}) \oplus \ldots \oplus \Lambda^n(\mathcal{E}) \quad \text{(A.5)}$$

equipado com o produto exterior $\wedge$ chama-se a **álgebra exterior de $\mathcal{E}^*$**.

## A.2 Orientabilidade de espaços vectoriais

Seja $\mathcal{E}$ um espaço vectorial real de dimensão $n$. Se $\{e_1, \ldots, e_n\}, \{\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n\}$ são bases ordenadas de $\mathcal{E}$, existe uma única matriz não-singular $(A^i_j)$ tal que $\hat{e}_j = A^i_j e_i$, $j = 1, \ldots, n$. Como $\det(A^i_j) \neq 0$, podemos definir uma relação de equivalência no conjunto $\mathcal{B}$ de todas as bases ordenadas de $\mathcal{E}$ da seguinte forma:

$$\{\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n\} \sim \{e_1, \ldots, e_n\} \text{ sse } \det(A^i_j) > 0.$$

É fácil ver que existem apenas duas classes de equivalência em $\mathcal{B}$. Cada uma delas chama-se uma **orientação em $\mathcal{E}$**.

Existe uma relação entre as (duas) orientações possíveis de $\mathcal{E}$ e o espaço $\Lambda^n(\mathcal{E})$ das $n$-formas em $\mathcal{E}$.

**Teorema 19.** *Seja $\alpha$ um elemento não nulo de $\Lambda^n(\mathcal{E})$. Então o conjunto*

$$\mu = \{\{e_1, \ldots, e_n\} \in \mathcal{B} \mid \alpha(e_1, \ldots, e_n) > 0\}$$

*é uma orientação em $\mathcal{E}$.*

*Demonstração.* Temos de mostrar que $\mu$ é uma classe de equivalência da relação $\sim$. Sejam $\{e_1, \ldots, e_n\}$, $\{\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n\}$ bases ordenadas tais que $\hat{e}_j = A^i_j \, e_i$, $j = 1, \ldots, n$. Então

$$\alpha(\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n) = \alpha(Ae_1, \ldots, Ae_n) = \det(A^i_j) \, \alpha(e_1, \ldots, e_n),$$

logo $\alpha(\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n)$ e $\alpha(e_1, \ldots, e_n)$ têm sinal positivo sse $\det(A^i_j) > 0$, ou seja, sse $\{\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n\}$ e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ pertencem à mesma classe de equivalência. $\square$

O teorema anterior garante que um elemento não nulo de $\Lambda^n(\mathcal{E})$ induz uma única orientação em $\mathcal{E}$. Porém, o recíproco é falso, pois uma orientação $\mu$ em $\mathcal{E}$ não determina unicamente um elemento não nulo de $\Lambda^n(\mathcal{E})$. Na verdade, $\mu$ divide os elementos não nulos de $\Lambda^n(\mathcal{E})$ em dois subconjuntos disjuntos: os elementos $\alpha \in \Lambda^n(\mathcal{E})$ tais que $\alpha(e_1, \ldots, e_n) > 0$ para toda a base ordenada $\{e_1, \ldots, e_n\} \in \mu$ e os elementos $\alpha \in \Lambda^n(\mathcal{E})$ tais que $\alpha(e_1, \ldots, e_n) < 0$ para toda a base ordenada $\{e_1, \ldots, e_n\} \in \mu$.

Esta questão pode ser contornada se equipármos $\mathcal{E}$ com um produto interno, i.e., uma forma bilinear, simétrica e não degenerada.

Suponhamos então que $\mathcal{E}$ tem uma orientação $\mu$ e um produto interno $g$.

**Definição 16.** *Uma base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $\mathcal{E}$ diz-se* ***ortonormada relativamente a*** *$g$ se $g(e_i, e_j) = \pm\delta_{ij}$.*

**Observação 21.** *Se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ e $\{\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n\}$ são bases ortonormadas de $\mathcal{E}$ relacionadas por $\hat{e}_j = A^i_j \, e_i$, $j = 1, \ldots, n$, então $\det(A^i_j) = \pm 1$ e portanto $\alpha(\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n) = \pm\alpha(e_1, \ldots, e_n)$ para qualquer $\alpha \in \Lambda^n(\mathcal{E})$.*

**Definição 17.** *Uma base ordenada $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $\mathcal{E}$ diz-se* ***orientada relativamente a*** *$\mu$ se $\{e_1, \ldots, e_n\} \in \mu$.*

**Definição 18.** *Uma base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $\mathcal{E}$ diz-se* ***ortonormada e orientada*** *se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base ordenada, orientada relativamente a $\mu$ e ortonormada relativamente a $g$.*

Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormada e orientada de $\mathcal{E}$. Existe um único elemento não nulo $\mathrm{vol} \in \Lambda^n(\mathcal{E})$ tal que $\mathrm{vol}(e_1, \ldots, e_n) = 1$ (mais precisamente $\mathrm{vol} = e^1 \wedge \ldots \wedge e^n$, onde $\{e^1, \ldots, e^n\}$ é a base dual de $\{e_1, \ldots, e_n\}$). Note-se que, se $\{\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n\}$ é outra base ortonormada e orientada de $\mathcal{E}$, $\mathrm{vol}(\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n) = 1$. Ou seja, vol transforma *todas* as bases ortonormadas e orientadas de $\mathcal{E}$ em 1. A $n$-forma vol chama-se a **forma de volume canónica em $\mathcal{E}$ induzida por $\mu$ e $g$.**

**Observação 22.** *Se $\{\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n\}$ é uma base orientada de $\mathcal{E}$ (não necessariamente ortonormada) com base dual $\{\hat{e}^1, \ldots, \hat{e}^n\}$, então*

$$\mathrm{vol} = \sqrt{|\hat{g}|}\, \hat{e}^1 \wedge \ldots \wedge \hat{e}^n, \tag{A.6}$$

*onde $\hat{g} := \det(\hat{g}_{ij})$ e $\hat{g}_{ij} := g(\hat{e}_i, \hat{e}_j)$.*

## A.3 O operador de Hodge

Seja $\mathcal{E}$ um espaço vectorial real $n$-dimensional e $k$ um inteiro tal que $0 \leq k \leq n$. Pela equação (A.3), $\dim \Lambda^k(\mathcal{E}) = \dim \Lambda^{n-k}(\mathcal{E})$ e portanto $\Lambda^k(\mathcal{E})$ é isomorfo a $\Lambda^{n-k}(\mathcal{E})$. Em geral, este isomorfismo não é canónico. Contudo, se equipármos $\mathcal{E}$ com uma orientação e um produto interno, existe um isomorfismo canónico

$$^*\colon \Lambda^k(\mathcal{E}) \to \Lambda^{n-k}(\mathcal{E})$$

designado por **operador de Hodge**. Para construir este isomorfismo necessitamos de introduzir um produto interno em $\Lambda^k(\mathcal{E})$ para cada $k = 0, 1, \ldots, n$.

Consideremos então o espaço vectorial $\mathcal{E}$ equipado com um produto interno $g$[1]. Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de $\mathcal{E}$ (não necessariamente ortonormada) com base dual $\{e^1, \ldots, e^n\}$. Seja ainda $g_{ij} = g(e_i, e_j)$, $i, j = 1, \ldots, n$ e $(g^{ij})$ a matriz inversa de $(g_{ij})$. Para $\alpha, \beta \in \Lambda^k(\mathcal{E})$, $k \geq 1$, podemos escrever

$$\alpha = \frac{1}{k!}\, \alpha_{i_1 \ldots i_k} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k},$$

[1]para introduzir um produto interno em $\Lambda^k(\mathcal{E})$ não necessitamos de qualquer orientação em $\mathcal{E}$.

$$\beta = \frac{1}{k!}\,\beta_{i_1\dots i_k} e^{i_1}\wedge\dots\wedge e^{i_k}.$$

Definimos o produto interno $g$ (denota-se pela mesma letra) em $\Lambda^k(\mathcal{E})$ por

$$g(\alpha,\beta) = \frac{1}{k!}\,g^{i_1 j_1}\dots g^{i_k j_k}\alpha_{i_1\dots i_k}\beta_{j_1\dots j_k} \tag{A.7}$$

**Observação 23.** *O produto interno $g$ em $\Lambda^k(\mathcal{E})$ é independente da escolha de base para $\mathcal{E}$. Por convenção, se $\alpha,\beta\in\Lambda^0(\mathcal{E})=\mathbb{R}$, $g(\alpha,\beta)=\alpha\beta$.*

**Teorema 20.** *Seja $\mathcal{E}$ um espaço vectorial real de dimensão $n$, com orientação $\mu$ e produto interno $g$. Seja* vol *a forma de volume canónica induzida por $\mu$ e $g$ e seja $k$ um inteiro tal que $0\le k\le n$. Então, existe um único isomorfismo linear*

$$^*\colon \Lambda^k(\mathcal{E})\to\Lambda^{n-k}(\mathcal{E})$$

*tal que*

$$\alpha\wedge{}^*\beta = g(\alpha,\beta)\ \mathrm{vol} \tag{A.8}$$

*para todo o $\alpha,\beta\in\Lambda^k(\mathcal{E})$.*

*Demonstração.* [N2, pp. 224] ☐

**Observação 24.** *Se $\beta\in\Lambda^k(\mathcal{E})$, escrevemos $\|\beta\|^2 := g(\beta,\beta)$. Para $\alpha=\beta$ a equação* (A.8) *escreve-se $\beta\wedge{}^*\beta = \|\beta\|^2$ vol. Note-se que $\|\beta\|^2$ não é necessariamente positivo pois o produto interno $g$ em $\Lambda^k(\mathcal{E})$ não é necessariamente definido positivo.*

Terminamos esta parte com uma fórmula explícita para o operador de Hodge. Necessitamos de usar o símbolo de Levi-Civita

$$\varepsilon_{j_1\dots j_n} = \begin{cases} 1 & \text{se } j_1,\dots j_n \text{ é uma permutação par de } 1\dots n \\ -1 & \text{se } j_1\dots j_n \text{ é uma permutação ímpar de } 1\dots n \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Seja $\{e_1,\dots,e_n\}$ uma base ortonormada e orientada de $\mathcal{E}$ com base dual $\{e^1\dots e^n\}$. Se $\{\hat{e}_1\dots,\hat{e}_n\}$ é outra base orientada (não necessariamente ortonormada) de $\mathcal{E}$ com base dual $\{\hat{e}^1,\dots,\hat{e}^n\}$, então $\hat{e}_j = A^i_j e_i$, $j=1,\dots,n$, para alguma matriz não singular $(A^i_j)$ e $\hat{e}^j = B^j_i e^i$, $j=1,\dots,n$, onde $(B^j_i)$ é a matriz inversa de $(A^i_j)$. Além disso, sejam $g_{ij}=g(e_i,e_j)$, $\hat{g}_{ij}=g(\hat{e}_i,\hat{e}_j)$, $i,j=$

$1, \ldots, n$, e $(g^{ij})$, $(\hat{g}^{ij})$ as matrizes inversas de $(g_{ij})$, $(\hat{g}_{ij})$, respectivamente. Para $\beta \in \Lambda^k(\mathcal{E})$ podemos escrever

$$\beta = \frac{1}{k!}\, \beta_{i_1 \ldots i_k} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k} = \frac{1}{k!}\, \hat{\beta}_{i_1 \ldots i_k} \hat{e}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \hat{e}^{i_k}.$$

Mostra-se que

$$^*\beta = \frac{\sqrt{|\hat{g}|}}{k!(n-k)!}\, \varepsilon_{i_1 \ldots i_k j_1 \ldots j_{n-k}} \hat{\beta}^{i_1 \ldots i_k} \hat{e}^{j_1} \wedge \ldots \wedge \hat{e}^{j_{n-k}}, \qquad \text{(A.9)}$$

onde $\hat{\beta}^{i_1 \ldots i_k} = \hat{g}^{i_1 l_1} \ldots \hat{g}^{i_k l_k} \hat{\beta}_{l_1 \ldots l_k}$.

**Observação 25.** *Relativamente à base ortonormada e orientada $\{e_1, \ldots e_n\}$ temos que $|g| = 1$ e portanto*

$$^*\beta = \frac{1}{k!(n-k)!}\, \varepsilon_{i_1 \ldots i_k j_1 \ldots j_{n-k}} \beta^{i_1 \ldots i_k} e^{j_1} \wedge \ldots \wedge e^{j_{n-k}}. \qquad \text{(A.10)}$$

**Teorema 21.** *Seja $\mathcal{E}$ um espaço vectorial real de dimensão $n$, com orientação $\mu$ e produto interno $g$ com índice*[2] *$s$. Então, para todo o $\beta \in \Lambda^k(\mathcal{E})$ e $0 \leq k \leq n$, temos*

$$^{**}\beta = (-1)^{k(n-k)+s}\beta. \qquad \text{(A.11)}$$

*Demonstração.* [N2, pp. 228] □

O operador de Hodge estende-se naturalmente ao espaço $\Lambda^k(\mathcal{E}, \mathcal{V})$ da seguinte forma: se $\{T_1, \ldots T_m\}$ é uma base de $\mathcal{V}$, qualquer $\alpha \in \Lambda^k(\mathcal{E}, \mathcal{V})$ escreve-se de forma única como

$$\alpha = \alpha^1 \otimes T_1 + \ldots + \alpha^m \otimes T_m, \qquad \alpha^i \in \Lambda^k(\mathcal{E}).$$

O operador $^*\colon \Lambda^k(\mathcal{E}, \mathcal{V}) \to \Lambda^{n-k}(\mathcal{E}, \mathcal{V})$ é definido componente a componente, i.e.

$$^*\alpha = {}^*\alpha^1 \otimes T_1 + \ldots + {}^*\alpha^m \otimes T_m. \qquad \text{(A.12)}$$

É fácil ver que esta definição não depende da escolha de base para $\mathcal{V}$.

Se $\mathcal{V}$ tem um produto interno $h$, podemos usar os produtos internos $g$ em $\mathcal{E}$ e $g$ em $\Lambda^k(\mathcal{E})$ para definir um produto interno $(gh)$ em cada $\Lambda^k(\mathcal{E}, \mathcal{V})$. Para

[2] o índice de um produto interno $g$ é o número de sinais negativos da matriz $(g_{ij})$, onde $g_{ij} = g(e_i, e_j)$ para $\{e_1, \ldots, e_n\}$ qualquer base ortonormada. Usando a observação 21 é fácil ver que o índice de $g$ não depende da escolha de base ortonormada.

$\alpha, \beta \in \Lambda^k(\mathcal{E}, \mathcal{V})$ escrevemos $\alpha = \alpha^i \otimes T_i$, $\beta = \beta^i \otimes T_i$ relativamente à base $\{T_1, \ldots T_m\}$ de $\mathcal{V}$ e denotamos $h_{ij} = h(T_i, T_j)$ para $i, j = 1, \ldots m$. Define-se o produto interno $(gh)$ em $\Lambda^k(\mathcal{E}, \mathcal{V})$ por

$$(gh)(\alpha, \beta) = h_{ij}\, g(\alpha^i, \beta^i). \tag{A.13}$$

**Observação 26.** *Esta definição não depende da escolha de base para $\mathcal{V}$. Além disso, se $\alpha, \beta \in \Lambda^0(\mathcal{E}, \mathcal{V}) = \mathcal{V}$, então $(gh) = h$. Se $h$ é definido positivo e $\{T_1, \ldots T_m\}$ é uma base ortonormada relativamente a $h$, a equação* (A.13) *escreve-se*

$$(gh)(\alpha, \beta) = g(\alpha^1, \beta^1) + \ldots + g(\alpha^m, \beta^m).$$

*Em particular, denotando $|\alpha|^2 = (gh)(\alpha, \alpha)$ temos*

$$|\alpha|^2 = \| \alpha^1 \|^2 + \ldots + \| \alpha^m \|^2 .$$

# Bibliografia

[N1] Gregory L. Naber, *Topology, Geometry, and Gauge Fields - Foundations*, Springer-Verlag, 1997.

[N2] Gregory L. Naber, *Topology, Geometry, and Gauge Fields - Interactions*, Springer-Verlag, 2000.

[Bl] David Bleecker, *Gauge Theory and Variational Principles*, Addison-Wisley Publishing Company, Inc., 1981.