Quaterniões e Rotações

Se olharmos para a expressão do produto de dois quaterniões,

$$(a + \mathbf{u})(b + \mathbf{w}) = ab - \mathbf{u}\cdot\mathbf{w} + a\mathbf{w} + b\mathbf{u} + \mathbf{u}\times\mathbf{w},$$

é evidente que para qualquer rotação $S \in SO(3)$ a aplicação

$$\mathbb{H} \ni a + \mathbf{v} \mapsto a + S\mathbf{v} \in \mathbb{H}$$

é um automorfismo deste anel (a isometria tem que ser própria para preservar o produto externo).

Suponhamos que queremos uma expressão para a rotação de um ângulo θ em torno do eixo $\mathbf{n} \in S^2$ (que identificamos com um quaternião sem parte real). Compondo com uma rotação apropriada, podemos supor que $\mathbf{n} = \mathbf{i}$. Consideremos a aplicação

$$\mathbb{R}^3 \ni \mathbf{v} \mapsto (a + b\mathbf{i})\mathbf{v}(a - b\mathbf{i}) \in \mathbb{R}^3$$

Claramente,

$$(a + b\mathbf{i})\mathbf{i}(a - b\mathbf{i}) = (a + b\mathbf{i})(a - b\mathbf{i})\mathbf{i} = (a^2 + b^2)\mathbf{i}$$

e

$$\begin{aligned}(a + b\mathbf{i})\mathbf{j}(a - b\mathbf{i}) &= (a + b\mathbf{i})(a + b\mathbf{i})\mathbf{j} = (a + b\mathbf{i})^2\mathbf{j};\\ (a + b\mathbf{i})\mathbf{k}(a - b\mathbf{i}) &= (a + b\mathbf{i})(a + b\mathbf{i})\mathbf{k} = (a + b\mathbf{i})^2\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Fazendo

$$a + b\mathbf{i} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \exp\left(\mathbf{i}\frac{\theta}{2}\right)$$

obtemos

$$\begin{aligned}(a + b\mathbf{i})\mathbf{i}(a - b\mathbf{i}) &= \mathbf{i};\\ (a + b\mathbf{i})\mathbf{j}(a - b\mathbf{i}) &= \exp(\mathbf{i}\theta)\mathbf{j};\\ (a + b\mathbf{i})\mathbf{k}(a - b\mathbf{i}) &= \exp(\mathbf{i}\theta)\mathbf{k},\end{aligned}$$

e portanto esta aplicação fornece uma rotação de um ângulo θ em torno de $\mathbf{i}$. A expressão para a rotação pretendida é então

$$\mathbb{R}^3 \ni \mathbf{v} \mapsto \exp\left(\mathbf{n}\frac{\theta}{2}\right)\ \mathbf{v}\ \exp\left(-\mathbf{n}\frac{\theta}{2}\right) \in \mathbb{R}^3.$$

Qualquer quaternião unitário diferente de ± 1 pode ser escrito de forma única como $\exp(\mathbf{l}\varphi)$ com $\mathbf{l} \in S^2$ e $\varphi \in (0, \pi)$. Dois destes quaterniões $\exp(\mathbf{l}\varphi)$ e $\exp(\mathbf{m}\psi)$ determinam a mesma rotação *sse* $\mathbf{l} = \mathbf{m}$ e $2\varphi = 2\psi$ (i.e., $\exp(\mathbf{l}\varphi) = \exp(\mathbf{m}\psi)$) ou $\mathbf{l} = -\mathbf{m}$ e $2\varphi = 2\pi - 2\psi$ (i.e., $\exp(\mathbf{l}\varphi) = -\exp(\mathbf{m}\psi)$). Isto mostra que S^3 é um revestimento duplo de $SO(3)$.

De passagem, notamos que o homomorfismo induzido em $\mathbb{H}$ por $S \in SO(3)$ referido acima é na realidade a aplicação $q \mapsto rqr^{-1}$, onde r é um quaternião unitário tal que $S\mathbf{v} = r\mathbf{v}r^{-1}$.

A composição de rotações pode ser obtida a partir da seguinte construção geométrica: dadas duas rotações não triviais, consideramos em $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ os círculos máximos ortogonais aos respectivos eixos. A partir de uma das intersecções destes, afastamo-nos de um ângulo igual a metade do ângulo de cada rotação ao longo do círculo máximo correspondente. Obtemos assim dois pontos de S^2. A composição é uma rotação em torno do eixo ortogonal ao círculo máximo definido por estes dois pontos, de um ângulo igual ao dobro do ângulo entre os pontos ao longo deste círculo máximo.

Esta construção pode ser obtida a partir da relação entre quaterniões e rotações. Podemos assumir que uma das rotações é de um ângulo θ em torno do eixo $\mathbf{i}$, e que a composição é uma rotação de ψ em torno de um eixo $\mathbf{m} = \cos\alpha\mathbf{i} + \operatorname{sen}\alpha\mathbf{j}$. A segunda rotação será de um ângulo φ em torno de um eixo $\mathbf{n}$, de forma a que os quaterniões unitários que representam estas rotações estão relacionados através da fórmula

$$\exp\left(\mathbf{m}\frac{\psi}{2}\right) = \exp\left(\mathbf{n}\frac{\varphi}{2}\right)\exp\left(\mathbf{i}\frac{\theta}{2}\right).$$

A aplicação $\mathbf{v} \mapsto \exp(\mathbf{v})$ é claramente a aplicação exponencial de S^3, e consequentemente $t \mapsto \exp(\mathbf{v}t)$ é uma geodésica da métrica redonda de S^3 (que é bi-invariante), parametrizada pelo comprimento de arco se $\|\mathbf{v}\| = 1$. Portanto

$$\begin{aligned} &t \mapsto \exp(\mathbf{i}t)\mathbf{k} && (0 \leq t \leq \frac{\theta}{2}) \\ &t \mapsto \exp(\mathbf{m}t)\mathbf{k} && (0 \leq t \leq \frac{\psi}{2}) \end{aligned}$$

são arcos de geodésicas em $\mathbb{R}^3 \cap S^3 = S^2$ unindo $\mathbf{k}$ a $\exp\left(\mathbf{i}\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{k}$ e $\exp\left(\mathbf{m}\frac{\psi}{2}\right)\mathbf{k}$, de comprimentos $\frac{\theta}{2}$ e $\frac{\psi}{2}$. Mais, são ortogonais a $\mathbf{i}$ e a $\mathbf{m}$: de facto,

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}(\mathbf{i}\exp(\mathbf{i}t)\mathbf{k}) = \operatorname{Re}(-\cos t\mathbf{j} - \operatorname{sen} t\mathbf{k}) = 0; \\ &\operatorname{Re}(\mathbf{m}\exp(\mathbf{m}t)\mathbf{k}) = \operatorname{Re}(\cos t\mathbf{mk} - \operatorname{sen} t\mathbf{k}) = 0. \end{aligned}$$

Vamos agora ver que o arco de geodésica que une $\exp\left(\mathbf{i}\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{k}$ a $\exp\left(\mathbf{m}\frac{\psi}{2}\right)\mathbf{k}$ é ortogonal a $\mathbf{n}$, i.e., que

$$\operatorname{Re}\left(\mathbf{n}\exp\left(\mathbf{i}\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{k}\right) = \operatorname{Re}\left(\mathbf{n}\exp\left(\mathbf{m}\frac{\psi}{2}\right)\mathbf{k}\right) = 0.$$

Para tal, basta ver que

$$\operatorname{Re}\left(\exp\left(\mathbf{n}\frac{\varphi}{2}\right)\exp\left(\mathbf{i}\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{k}\right) = \operatorname{Re}\left(\exp\left(\mathbf{m}\frac{\psi}{2}\right)\mathbf{k}\right) = 0$$

e

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}\left(\exp\left(\mathbf{n}\frac{\varphi}{2}\right)\exp\left(\mathbf{m}\frac{\psi}{2}\right)\mathbf{k}\right) = \operatorname{Re}\left(\exp\left(\mathbf{m}\frac{\psi}{2}\right)\mathbf{k}\exp\left(\mathbf{n}\frac{\varphi}{2}\right)\right) = \\ &\operatorname{Re}\left(\mathbf{k}\exp\left(-\mathbf{m}\frac{\psi}{2}\right)\exp\left(\mathbf{n}\frac{\varphi}{2}\right)\right) = \operatorname{Re}\left(\mathbf{k}\exp\left(-\mathbf{i}\frac{\theta}{2}\right)\right) = 0. \end{aligned}$$

Este arco de geodésica é dado por

$$t \mapsto \exp(\mathbf{n}t)\exp\left(\mathbf{i}\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{k} \qquad (0 \leq t \leq \frac{\varphi}{2}),$$

uma vez que este é um arco de geodésica em S^3 que une os dois pontos e $S^2 \subset S^3$ é totalmente geodésica. Portanto, o seu comprimento é $\frac{\varphi}{2}$.