Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Geometria Diferencial

1º Teste Para Praticar

Duração: 1 hora e 30 minutos.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

(5 val.) **1.** Seja M uma variedade diferenciável de dimensão d compacta. Mostre que não existe nenhum difeomorfismo local $\Phi : M \to \mathbb{R}^d$.

(5 val.) **2.** Considere a distribuição D definida em $\mathbb{R}^{n+1}$ pelos campos vectoriais $X_1, \ldots, X_n$, onde

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + a_i(x^1, \ldots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^{n+1}}$$

(com $a_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^∞). Mostre que D é integrável *sse* a 1-forma $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$ definida por

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i dx^i$$

é fechada. Quais são as subvariedades integrais neste caso?

(5 val.) **3.** Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, e $X, Y \in \mathfrak{g}$. Mostre que

$$\exp(X)\exp(Y)\exp(-X) = \exp\left(\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(ad(X))^n\right) Y\right),$$

onde $ad : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ é a representação adjunta. Conclua que se G é conexo e $\mathfrak{g}$ é abeliana então G é abeliano. E se G não for conexo?

(5 val.) **4.** Seja G um grupo de Lie conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. O centro de G é o conjunto

$$Z(G) = \{g \in G : gh = hg, \forall h \in G\};$$

O centro de $\mathfrak{g}$ é o conjunto

$$z(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} : [X, Y] = 0, \forall Y \in \mathfrak{g}\}.$$

Mostre que $Z(G)$ é um subgrupo de Lie mergulhado com álgebra $z(\mathfrak{g})$.