Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Geometria Diferencial

2º Teste Para Praticar

Duração: 1 hora e 30 minutos.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

(5 val.) **1.** Calcule a cohomologia de de Rham de $\mathbb{P}^d$.

(5 val.) **2.** Prove o Teorema de Poincaré-Hopf para variedades não orientáveis.

(5 val.) **3.** Prove que qualquer grupo de Lie G possui uma conexão afim ∇ para a qual os campos invariantes à esquerda são paralelos. Mostre que ∇ é plana e calcule a sua torção. Determine ainda o homomorfismo de holonomia e a cohomologia com coeficientes em TG associados a esta conexão.

(5 val.) **4.** Mostre que o polinómio invariante $\sigma_2 : \mathfrak{gl}(r) \to \mathbb{R}$ é dado por

$$\sigma_2(A) = \frac{1}{2}\left((\operatorname{tr} A)^2 - \operatorname{tr} A^2\right).$$

Conclua que a primeira classe de Pontryagin de um fibrado vectorial $\xi = (\pi, E, M)$ com conexão ∇ é dada pela forma com representação local

$$p_1(\xi) = \frac{1}{8\pi^2}\left(\left(\sum_{a=1}^{r} \Omega_a{}^a\right)^2 - \sum_{a,b=1}^{r} \Omega_a{}^b \wedge \Omega_b{}^a\right)$$

num referencial local $\{s_1, \ldots, s_r\} \subset \Gamma_U(E)$.

Recorde que uma variedade Riemanniana $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se diz **isotrópica** se as formas de curvatura da sua conexão de Levi-Civita satisfazem

$$\Omega_a{}^b = -K\omega^a \wedge \omega^b$$

em qualquer co-referencial ortonormado $\{\omega^1, \ldots, \omega^d\} \subset \Gamma_U(T^*M)$, onde $K \in C^\infty(M)$. Mostre que $p_1(TM) = 0$ para qualquer variedade que admita uma estrutura Riemanniana isotrópica. (Em particular, $p_1(T\mathbb{S}^d) = 0$).