Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Geometria Diferencial
2004/2005
1º Teste - 4 de Novembro de 2004 - 9h

Duração: 1 hora e 30 minutos.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

(5 val.) **1.** Use o Teorema de Frobenius para provar que qualquer forma-1 fechada em $\mathbb{R}^d$ é exacta.

(5 val.) **2.** Se G é um grupo de Lie, mostre que a componente conexa da identidade G_0 é um grupo de Lie com a mesma álgebra de Lie.

(5 val.) **3.** Identificamos $\mathbb{R}^3$ com o espaço vectorial $\mathbb{H}_0$ das matrizes 2×2 Hermitianas de traço zero mediante a aplicação

$$(x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} z & x + iy \\ x - iy & -z \end{pmatrix}.$$

A aplicação

$$SU(2) \times \mathbb{H}_0 \ni (g, A) \mapsto gAg^* \in \mathbb{H}_0$$

determina uma acção de $SU(2)$ em $\mathbb{R}^3$. Mostre que esta acção é por isometrias. Determine a correspondente acção infinitesimal

$$\phi : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3),$$

e use este resultado para provar que $SU(2)$ é o revestimento universal de $SO(3)$. Conclua ainda que $SO(3)$ não é simplesmente conexo.

(5 val.) **4.** O *centro* de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é o conjunto

$$z(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} : [X, Y] = 0, \forall Y \in \mathfrak{g}\}.$$

Prove o Teorema de Ado para álgebras de Lie com centro trivial.