Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Geometria Diferencial
2004/2005
Repescagem do 1º Teste - 21 de Janeiro de 2005 - 9h

Duração: 1 hora e 30 minutos.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

(5 val.) **1.** Seja M uma variedade diferenciável de dimensão 2, $\alpha \in \Omega^1(M)$ e $p \in M$ tal que $\alpha_p \neq 0$. Mostre que existe um aberto $U \ni p$ e funções $f, g \in C^\infty(U)$ tais que $\alpha|_U = f dg$.

(5 val.) **2.** Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, e $\omega : \mathfrak{g} \times \ldots \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ uma aplicação k-multilinear. Mostre que ω define um tensor-k invariante à esquerda em G. Mostre ainda que este tensor é bi-invariante (i.e., invariante à esquerda e à direita) *sse*

$$\omega(\mathrm{Ad}(g)X_1, \ldots, \mathrm{Ad}(g)X_k) = \omega(X_1, \ldots, X_k)$$

para todo o $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{g}$ e $g \in G$, onde $\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g})$ designa a representação adjunta.

(5 val.) **3.** Use o facto de qualquer grupo de Lie compacto ser unimodular para mostrar que qualquer grupo de Lie compacto possui uma métrica Riemanniana bi-invariante.

(5 val.) **4.** Seja G um grupo de Lie compacto e conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Pode mostrar-se que $H^k(G)$ é isomorfo ao espaço das k-formas bi-invariantes. Use a aplicação $\omega : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\omega(X, Y, Z) = \langle [X, Y], Z \rangle,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ determina uma métrica bi-invariante em G, para mostrar que se $\mathfrak{g}$ é não abeliana então $H^3(G) \neq 0$. Deduza que as únicas esferas que são grupos de Lie são $\mathbb{S}^0$, $\mathbb{S}^1$ e $\mathbb{S}^3$.