Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Geometria Diferencial

2004/2005

2º Teste - 18 de Janeiro de 2005 - 10h

Duração: 1 hora e 30 minutos.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

(5 val.) **1.** Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. O anel das formas diferenciais invariantes à esquerda, munido da derivada exterior de formas diferenciais, forma um complexo diferencial, cuja cohomologia $H(\mathfrak{g})$ se diz a **cohomologia da álgebra de Lie** $\mathfrak{g}$. Pode provar-se que se G é compacto e conexo então $H(\mathfrak{g}) = H(G)$. Use este facto para calcular a cohomologia do toro $\mathbb{T}^d$.

(5 val.) **2.** Calcule a cohomologia de de Rham de $\mathbb{R}^d \setminus \{p, q\}$ (onde $p, q \in \mathbb{R}^d$ são dois pontos distintos).

(5 val.) **3.** Seja $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado vectorial com uma conexão ∇ com a propriedade de que todo o ponto $p \in M$ possui uma vizinhança U tal que o transporte paralelo de qualquer vector ao longo de um caminho $\gamma : [0,1] \to U$ com $\gamma(0) = \gamma(1) = p$ é a identidade em E_p. Prove que ∇ é plana.

(5 val.) **4.** Mostre que a acção adjunta de $SO(2)$ em $\mathfrak{so}(2)$ é trivial. Deste modo, o polinómio $P : \mathfrak{so}(2) \to \mathbb{R}$ dado por

$$P\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = a$$

(dito o **Pfaffiano**) é Ad-invariante. Portanto, se $\xi = (\pi, E, M)$ é um fibrado vectorial de rank 2 orientável com uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e ∇ é uma conexão compatível com $\langle \cdot, \cdot \rangle$, a 2-forma $e(\xi) = \frac{1}{2\pi}\Omega_1^{\ 2}$ define uma classe característica, onde a forma de curvatura $\Omega_1^{\ 2}$ é relativa a um referencial ortonormado positivamente orientado qualquer. Determine $e(T\mathbb{S}^2)$.