2º Exame de Mecânica Geométrica

2 de Julho de 2002 – 9 horas
Duração: 3h

(2 val.) 1. Seja $C \subset \mathbb{R}^3$ a configuração de referência de um corpo rígido e $\rho : \overline{C} \to \mathbb{R}^+$ a função densidade. Suponha que $\mathbf{0} \in C$ é o centro de massa de C, i.e.,

$$\int_C \boldsymbol{\xi} \rho(\boldsymbol{\xi}) d^3\xi = \mathbf{0}.$$

Um *movimento* do corpo rígido é um caminho $(S, \mathbf{r}) : \mathbb{R} \to SO(3) \times \mathbb{R}^3$, de forma que cada ponto $\boldsymbol{\xi} \in C$ descreve o caminho

$$\mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi}) = S(t)\boldsymbol{\xi} + \mathbf{r}(t).$$

A *energia cinética* associada a este movimento é definida da forma natural,

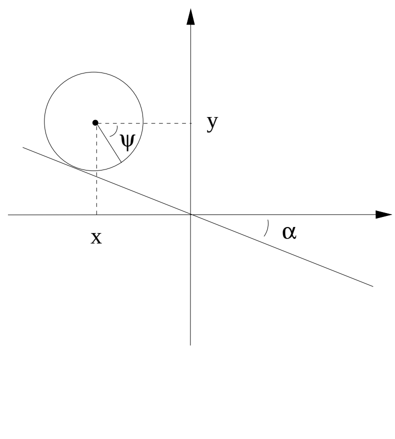
$$K = \frac{1}{2} \int_C \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right\rangle \rho(\boldsymbol{\xi}) d^3\xi,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno Euclidiano em $\mathbb{R}^3$. Mostre que

$$K = \frac{1}{2} M \langle \dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}} \rangle + \frac{1}{2} \langle\langle \dot{S}, \dot{S} \rangle\rangle,$$

onde $M = \int_C \rho(\boldsymbol{\xi}) d^3\xi$ é a massa total de C e $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ é a métrica invariante à esquerda definida pelo corpo rígido em $SO(3)$.

2. Considere uma esfera de massa M e raio R que rola sem escorregar sobre uma calha inclinada que forma um ângulo α com a horizontal, como mostra a figura. Tomamos para espaço de configurações $\mathbb{R} \times S^1$ com coordenadas (x, ψ).



(2 val.) a) Use o exercício anterior para mostrar que a energia cinética da esfera é

$$K = \frac{M \sec^2 \alpha}{2} \dot{x}^2 + \frac{MR^2}{5} \dot{\psi}^2.$$

Mostre que a energia potencial correspondente ao campo gravitacional constante de aceleração $-g\mathbf{e}_y$ pode ser dada por

$$U = -Mgx \operatorname{tg} \alpha.$$

(2 val.) b) A restrição de rolar sem escorregar corresponde à distribuição definida pelo núcleo de $\omega = dx - R \cos \alpha d\psi$. De que tipo de restrição se trata? Escreva as equações do movimento.

(2 val.) c) Resolva as equações do movimento e indique a força de reacção. Qual a interpretação física desta força?

3. Em virtude do seu movimento de rotação, a Terra não é uma esfera perfeita, mas sim um elipsóide oblato; consequentemente, os seus momentos de inércia não são rigorosamente iguais, satisfazendo a relação

$$I_1 = I_2 \neq I_3;$$
$$\frac{I_3 - I_1}{I_1} \simeq \frac{1}{306}.$$

Isto faz com que a atracção gravitacional do Sol e da Lua perturbe o movimento de rotação da Terra. Esta perturbação pode ser modelada pelo Lagrangeano $L : TSO(3) \to \mathbb{R}$ dado em coordenadas locais por

$$L = \frac{I_1}{2} \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2 \theta \right) + \frac{I_3}{2} \left(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta \right)^2 + \frac{\Omega^2}{2} (I_3 - I_1) \cos^2 \theta,$$

onde (θ, φ, ψ) são os ângulos de Euler e $\dfrac{2\pi}{\Omega} \simeq 168$ dias.

(2 val.) a) Escreva as equações do movimento e determine os pontos de equilíbrio.

(2 val.) b) Mostre que se $\theta(t) \equiv \theta_0$ e $|\dot{\varphi}| << |\dot{\psi}|$ (como é aproximadamente o caso da Terra) então

$$\dot{\varphi} \simeq -\frac{(I_3 - I_1)\Omega^2 \cos \theta_0}{I_3 \dot{\psi}}.$$

Sabendo que para a Terra $\theta_0 \simeq 23°$ e $\cos(23°) \simeq 0.92$, determine o valor aproximado do período de $\varphi(t)$ (dito o *período da precessão dos equinócios*).

(2 val.) c) Determine a transformação de Legendre, mostre que L é hiper-regular e escreva a expressão do Hamiltoniano $H : T^*SO(3) \to \mathbb{R}$.

(2 val.) d) Escreva as equações de Hamilton e indique uma órbita periódica do correspondente sistema dinâmico em $T^*SO(3)$. Descreva o movimento periódico que encontrou.

(2 val.) e) Prove que H é completamente integrável num conjunto aberto denso $U \subset T^*SO(3)$, e use este facto para argumentar que o resultado que obteve na alínea b) permanece válido quando existe nutação (i.e., quando θ não é constante mas oscila com pequena amplitude

em torno de uma posição de equilíbrio θ_0). Mostre que a projecção do toro/cilindro invariante

$$M_{(E,0,0)} = \{p_\theta d\theta + p_\varphi d\varphi + p_\psi d\psi \in U : H = E, p_\varphi = p_\psi = 0\}$$

em $SO(3)$ é dada em coordenadas locais por

$$\frac{\Omega^2}{2}(I_3 - I_1)\cos^2\theta \geq -E.$$

(2 val.) f) Um modelo usual para $SO(3)$ é dado por $B/\sim$, onde

$$B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| \leq \pi\}$$

e $\sim$ é a relação de equivalência em B é dada por

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \Leftrightarrow \|\mathbf{x}\| = \pi \text{ e } \mathbf{x} = -\mathbf{y}$$

(i.e., identificação antipodal na fronteira). Cada ponto $\mathbf{x} \in B \setminus \{\mathbf{0}\}$ representa a rotação em torno do eixo de versor $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$ de um ângulo $\|\mathbf{x}\|$ no sentido directo; a identificação antipodal na fronteira de B resulta do facto de que uma rotação de π em torno de $\mathbf{n}$ coincide com uma rotação de π em torno de $-\mathbf{n}$. A origem representa a identidade, cuja vizinhança contém todas as rotações de ângulo suficientemente pequeno.

Identifique neste modelo os pontos que não pertencem ao domínio da carta local $(\theta, \varphi, \psi) : SO(3) \to]0, \pi[\times S^1 \times S^1$ dada pelos ângulos de Euler.