11^{a} ficha de exercícios de Mecânica Geométrica

20 de Maio de 2002

1. Dados $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ e $\mathbf{A} \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$, considere o Lagrangeano com termo magnético

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 + e\mathbf{A}\cdot\dot{\mathbf{x}} - e\Phi = \frac{1}{2}m\dot{x}^i\dot{x}^i + eA^i\dot{x}^i - e\Phi.$$

   a) Mostre que as equações do movimento são

$$m\ddot{\mathbf{x}} = e(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B})$$

   onde $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ é o simétrico do gradiente de Φ e $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ é o rotacional de $\mathbf{A}$. (**Sugestão:** *Recorde que se*

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 \text{ se } (i,j,k) \text{ não é uma permutação de } (1,2,3) \\ \operatorname{sgn}(i,j,k) \text{ se } (i,j,k) \text{ é uma permutação de } (1,2,3) \end{cases}$$

   então $\mathbf{X} \times \mathbf{Y} = \varepsilon_{ijk}X^jY^k\partial_i$ *e* $\nabla \times \mathbf{X} = \varepsilon_{ijk}\partial_jY^k\partial_i$*; mostre que* $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$).

   b) Mostre que L é hiper-regular e determine a transformação de Legendre.

   c) Determine o Hamiltoniano do sistema e escreva as equações de Hamilton.

2. Mostre que qualquer variedade de dimensão 2 orientável possui uma estrutura simpléctica.

3. Dê exemplos de:

   a) Um campo localmente hamiltoniano que não seja hamiltoniano.

   b) Uma variedade de Poisson que não seja simpléctica.

   c) Uma variedade de Poisson $(M, \{\cdot,\cdot\})$ e uma função *não constante* $C \in C^\infty(M)$ tal que $\{C, F\} = 0$ para todo o $F \in C^\infty(M)$. Será isto possível numa variedade simpléctica?