Resolução Sumária da
12^{a} ficha de exercícios de Mecânica Geométrica

8 de Junho de 2002

1. Seja (M, ω) uma variedade simpléctica de dimensão 2 e $H \in C^\infty(M)$ o Hamiltoniano. Mostre que H é completamente integrável no complementar do conjunto dos seus pontos críticos. O que são os toros invariantes neste caso?

   Resolução: O próprio Hamiltoniano é obviamente um primeiro integral ($\{H, H\} = 0$) em involução consigo próprio, independente excepto nos pontos em que $dH = 0$. No complementar do conjunto dos seus pontos críticos, as suas superfícies de nível são subvariedades de dimensão 1, portanto difeomorfas a $\mathbb{R}$ (cilindros invariantes) ou S^1 (toros invariantes).

2. Considere o oscilador harmónico unidimensional, descrito pelo Lagrangeano $L : T\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado em coordenadas por
$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\omega^2 x^2.$$

   a) Escreva o correspondente Hamiltoniano $H : T^*\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e determine os seus pontos críticos.
   b) Determine os toros invariantes e a expressão do Hamiltoniano em termos das coordenadas acção-ângulo. (**Sugestão:** *Use o Teorema de Stokes*).
   c) Calcule a frequência do movimento em cada toro.
   d) Generalize os resultados acima para o oscilador harmónico bidimensional, descrito pelo Lagrangeano $L : T\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dado em coordenadas por
$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2).$$
   (**Sugestão:** *Procure primeiros integrais da forma* $F_1(x, p_x)$ e $F_2(y, p_y)$).

   Resolução: A transformação de Legendre é
$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x}$$
   e portanto o Hamiltoniano é
$$H = p\dot{x} - L = p^2 - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2.$$
   Os pontos críticos do Hamiltoniano são dados por
$$dH = 0 \Leftrightarrow \omega^2 x dx + p dp = 0 \Leftrightarrow x = p = 0.$$

O sistema é portanto completamente integrável em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, e os toros invariantes são as elipses

$$M_E = \left\{(x,p) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 = E\right\}$$

$(E > 0)$, de semieixos

$$a = \frac{\sqrt{2E}}{\omega}, \quad b = \sqrt{2E}.$$

A variável acção é

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{M_E} pdx = \frac{1}{2\pi}\iint_{\Sigma} dp \wedge dx = \frac{1}{2\pi}\pi ab = \frac{E}{\omega},$$

onde Σ é a região plana limitada por M_E e integramos no sentido horário ao longo de M_E. Portanto

$$H = E = \omega I,$$

e a frequência do movimento é

$$\frac{\partial H}{\partial I} = \omega.$$

Em particular este Hamiltoniano é degenerado, i.e., as frequências não identificam os toros invariantes.

A transformação de Legendre para o oscilador harmónico bidimensional é dada em coordenadas locais por

$$(p_x, p_y) = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = (\dot{x}, \dot{y})$$

e portanto o Hamiltoniano é

$$H = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} - L = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}p_y^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 + \frac{1}{2}\omega^2 y^2.$$

Uma vez que este sistema é constituido por dois osciladores harmónicos unidimensionais que não interagem, é natural esperar que as funções

$$F_1(x, p_x) = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2, \quad F_2(y, p_y) = \frac{1}{2}p_y^2 + \frac{1}{2}\omega^2 y^2$$

sejam primeiros integrais. Estas funções estão em involução, uma vez que

$$\{F_1, F_2\} = X_{F_1}(F_2) = \left(p_x\frac{\partial}{\partial x} - \omega^2 x\frac{\partial}{\partial p_x}\right)F_2 = 0.$$

Dado que $H = F_1 + F_2$, temos

$$\{H, F_1\} = \{F_1 + F_2, F_1\} = \{F_1, F_1\} + \{F_2, F_1\} = 0,$$

pelo que F_1 é de facto um primeiro integral; analogamente se mostra que F_2 é um primeiro integral. Temos

$$dF_1 = \omega^2 xdx + p_x dp_x, \quad dF_2 = \omega^2 ydy + p_y dp_y,$$

pelo que estes primeiros integrais são independentes sempre que dF_1, dF_2 não se anularem. Logo o oscilador harmónico bidimensional é completamente integrável em

$$\mathbb{R}^4 \setminus \left\{(x, y, p_x, p_y) \in \mathbb{R}^4 : (x = p_x = 0) \text{ ou } (y = p_y = 0)\right\}.$$

Os toros invariantes são os produtos cartesianos de elipses

$$M_{(f_1,f_2)} = \left\{(x, y, p_x, p_y) \in \mathbb{R}^4 : \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 = f_1 \text{ e } \frac{1}{2}p_y^2 + \frac{1}{2}\omega^2 y^2 = f_2\}\right\}$$

$(f_1, f_2 > 0)$. Fixando (y, p_y) ou (x, p_x) obtemos geradores da homologia do toro; sobre esses geradores, o potencial simpléctico $\theta = p_x dx + p_y dy$ coincide com $p_x dx$ ou $p_y dy$, respectivamente, e os integrais que fornecem as variáveis acção são exactamente os mesmos que no caso unidimensional; temos portanto

$$I_1 = \frac{f_1}{\omega}, \quad I_2 = \frac{f_2}{\omega},$$

e em termos das variáveis acção-ângulo o Hamiltoniano escreve-se

$$H = F_1 + F_2 = f_1 + f_2 = \omega I_1 + \omega I_2.$$

As frequências do movimento nos toros invariantes são então

$$\omega^1 = \frac{\partial H}{\partial I_1} = \omega, \quad \omega^2 = \frac{\partial H}{\partial I_2} = \omega.$$

Este Hamiltoniano é também degenerado, i.e., (ω^1, ω^2) não parametrizam os toros invariantes. Além disso $\omega^1 = \omega^2$, o que indica que cada movimento em cada toro invariante é periódico.

Finalmente, note-se que o conjunto dos pontos onde F_1, F_2 não são independentes é a união dos toros degenerados do tipo $M_{(f_1,0)}$ ou $M_{(0,f_2)}$ com $f_1, f_2 > 0$ (elipses) e $M_{(0,0)}$ (origem). Apesar de não serem toros bidimensionais, estes conjuntos são ainda invariantes para o fluxo hamiltoniano de H, e correspondem à situação em que cada um dos dois osciladores, ou ambos, se encontram parados.