Resolução Sumária da
1^{a} ficha de exercícios de Mecânica Geométrica

20 de Março de 2002

1. Mostre que se $g = g_{ij}dx^i \otimes dx^j \in T_p^*Q \otimes T_p^*Q$ então

   (i) g é simétrico *sse* $g_{ij} = g_{ji}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$;

   (ii) g é não degenerado *sse* $\det(g_{ij}) \neq 0$;

   (iii) g é definido positivo *sse* (g_{ij}) é uma matriz definida positiva.

   Resolução: Começamos por notar que

   $$g\left(v^i\frac{\partial}{\partial x^i}, w^j\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = v^i w^j g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = v^i w^j g_{kl} dx^k \otimes dx^l \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$
   $$= v^i w^j g_{kl} dx^k \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) dx^l \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = v^i w^j g_{kl}\delta_{ik}\delta_{jl} = g_{ij}v^i w^j = V^t G W$$

   onde V, W são os vectores coluna de componentes v^i, w^i e G é a matriz de componentes g_{ij}.

   Se g é simétrico então

   $$g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = g\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right) \Leftrightarrow g_{ij} = g_{ji}$$

   e portanto G é simétrica; por outro lado, se G é simétrica então

   $$g(v, w) = V^t G W = V^t G^t W = (V^t G^t W)^t = W^t G V = g(w, v)$$

   para todo o $v, w \in T_pQ$, i.e., g é simétrico.

   O tensor g é degenerado *sse* existe $v \in T_pQ \setminus \{0\}$ tal que para todo o $w \in T_pQ$

   $$g(v, w) = 0 \Leftrightarrow V^t G W = 0 \Leftrightarrow V^t G = 0 \Leftrightarrow G^t V = 0 \Leftrightarrow \det(G^t) = 0 \Leftrightarrow \det G = 0.$$

   Finalmente, g é definido positivo *sse* para todo o $v \in T_pQ \setminus \{0\}$

   $$g(v, v) > 0 \Leftrightarrow V^t G V > 0$$

   i.e., se G é definida positiva.

2. Dê um exemplo de uma subvariedade N de uma variedade pseudo-Riemanniana (Q, g) tal que a restrição de g a N não seja uma métrica pseudo-Riemanniana em N.

   Resolução: Por exemplo $N = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t = x\}$ e $(Q, g) = (\mathbb{R}^2, -dt \otimes dt + dx \otimes dx)$.

3. Seja G o grupo das tranformações afins próprias de $\mathbb{R}$, i.e., das funções $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$g(t) = yt + x$$

com $y > 0$ e $x \in \mathbb{R}$. Tomando $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ como coordenadas globais induzimos uma estrutura diferenciável em G.

a) Mostre que G com esta estrutura diferenciável é um grupo de Lie.

b) Determine a métrica invariante à esquerda induzida pelo produto interno Euclidiano

$$g = dx \otimes dx + dy \otimes dy$$

em $\mathfrak{g} = T_{(0,1)}G$.

Resolução: Dadas duas tranformações afins próprias

$$g(t) = bt + a$$
$$h(t) = yt + x$$

a sua composição é

$$g \circ h(t) = g(h(t)) = g(yt + x) = byt + bx + a$$

e portanto a operação do grupo em coordenadas locais escreve-se

$$(a, b) \cdot (x, y) = (bx + a, by).$$

O elemento neutro do grupo é claramente

$$e = (0, 1)$$

(correspondendo à função identidade), e

$$(a, b) = (x, y)^{-1} \Leftrightarrow (bx + a, by) = (0, 1) \Leftrightarrow (a, b) = \left(-\frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right).$$

Portanto a aplicação

$$(a, b) \times (x, y) \mapsto (a, b) \cdot (x, y)^{-1} = (a, b) \cdot \left(-\frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right) = \left(a - \frac{bx}{y}, \frac{b}{y}\right)$$

é claramente de classe C^∞, e G é grupo de Lie. Note-se que

$$L_{(a,b)}(x, y) = (bx + a, by)$$

e portanto na base $\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right\}$ temos a representação matricial

$$\left(L_{(a,b)}\right)_* = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(L_{(x,y)^{-1}}\right)_* = \left(L_{\left(-\frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right)}\right)_* = \begin{pmatrix} \frac{1}{y} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix}.$$

Concluimos que a métrica invariante à esquerda pedida é dada por

$$\left\langle v^1\frac{\partial}{\partial x}+v^2\frac{\partial}{\partial y}, w^1\frac{\partial}{\partial x}+w^2\frac{\partial}{\partial y}\right\rangle_{(x,y)} = \left\langle \frac{1}{y}v^1\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{y}v^2\frac{\partial}{\partial y}, \frac{1}{y}w^1\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{y}w^2\frac{\partial}{\partial y}\right\rangle_{(0,1)}$$
$$= \frac{1}{y^2}\left\langle v^1\frac{\partial}{\partial x}+v^2\frac{\partial}{\partial y}, w^1\frac{\partial}{\partial x}+w^2\frac{\partial}{\partial y}\right\rangle_{(0,1)} = \frac{1}{y^2}\left(v^1w^1+v^2w^2\right),$$

ou seja

$$g = \frac{1}{y^2}(dx\otimes dx + dy\otimes dy).$$