

3ª ficha de exercícios de Mecânica Geométrica

26 de Março de 2002

1. O *oscilador harmónico bidimensional* (em unidades apropriadas) é o sistema mecânico $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle, -dU)$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto Euclidiano usual e $U : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$U(x, y) = \frac{1}{2} (x^2 + y^2).$$

- a) Escreva as equações do movimento do oscilador harmónico bidimensional e indique a solução geral destas equações.
b) Use o Teorema de Jacobi para indicar uma métrica Riemanniana no disco

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

cujas geodésicas são os movimentos de energia $E_m = \frac{1}{2}$ do oscilador harmónico bidimensional. Indique um círculo e uma elipse que sejam geodésicas desta métrica. Será D isométrico a algum subconjunto de S^2 (com a métrica usual)?

- c) Podemos incluir atrito no oscilador harmónico bidimensional considerando a força exterior

$$\mathcal{F} \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) = -dU - k u dx - k v dy$$

(onde $k > 0$ é uma constante). Escreva as equações do movimento deste novo sistema mecânico e mostre que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{x}(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{y}(t) = 0.$$

(**Sugestão:** Calcule $\frac{dE_m}{dt}$).