Resolução Sumária da
9^{a} ficha de exercícios de Mecânica Geométrica

15 de Maio de 2002

1. a) Dê um exemplo de uma variedade Riemanniana contendo dois pontos pelos quais não passa qualquer geodésica.

   b) Dê um exemplo de uma variedade Riemanniana contendo dois pontos pelos quais passam infinitas geodésicas.

   c) Mostre que em $\mathbb{R}^2$ com a métrica Euclidiana $dx \otimes dx + dy \otimes dy$ não existem caminhos de comprimento máximo unindo $(0,0)$ a $(1,0)$.

   d) Mostre que em $\mathbb{R}^2$ com a métrica de Minkowski $-dt \otimes dt + dx \otimes dx$ não existem caminhos de comprimento mínimo unindo $(0,0)$ a $(1,0)$ que sejam imersões.

   e) Mostre que em $\mathbb{R}^3$ com a métrica de Minkowski $-dt \otimes dt + dx \otimes dx + dy \otimes dy$ existe um caminho de comprimento zero (portanto mínimo) unindo os pontos $(0,1,0)$ e $(2\pi,1,0)$ que é uma imersão mas não uma geodésica.

   Resolução:

   a) Por exemplo em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ com a métrica Euclidiana usual não existe qualquer geodésica que passe pelos pontos $(1,0)$ e $(-1,0)$.

   b) Por exemplo por dois pontos antípodas da esfera S^2 com a métrica redonda usual passa uma infinidade não numerável de geodésicas. Outro exemplo é fornecido pelo toro $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ com a métrica plana induzida pela métrica Euclidiana usual de $\mathbb{R}^2$; neste caso, pelos pontos $(0,0)+\mathbb{Z}$ e $(\frac{1}{2},0)+\mathbb{Z}$, por exemplo, passa uma infinidade numerável de geodésicas.

   c) Considerem-se os caminhos $c_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dados por $c_n(t) = (t, nt(t-1))$. Estes caminhos unem os pontos $(0,0)$ e $(1,0)$ e o comprimento do segmento entre estes dois pontos é

   $$\int_0^1 \sqrt{1+(2nt-n)^2}dt \geq \int_0^1 |2nt-n|dt = 2\int_{\frac{1}{2}}^1 (2nt-n)dt = \frac{n}{2} \to +\infty.$$

   Consequentemente não pode existir um caminho de comprimento máximo.

   d) Se o vector tangente ao caminho $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ é nulo, devemos ter

   $$\langle \dot{c}(\tau), \dot{c}(\tau) \rangle = 0 \Leftrightarrow \left\langle \dot{t}\frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial}{\partial x}, \dot{t}\frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = 0 \Leftrightarrow \dot{t}^2 - \dot{x}^2 = 0 \Leftrightarrow \dot{t} = \pm\dot{x}.$$

   Como a condição do caminho ser uma imersão proíbe $\dot{t} = \dot{x} = 0$, vemos que os únicos caminhos cujo vector velocidade é nulo têm como imagem rectas do tipo $t = \pm x + b$.

Concluimos que não existe qualquer caminho de comprimento zero unindo os pontos $(0,0)$ a $(1,0)$ que seja uma imersão. Considere-se a linha quebrada

$$\left[(0,0);\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right]\cup\left[\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right);(1,0)\right];$$

É fácil construir uma sucessão de caminhos que são imersões cujas imagens coincidem com esta linha quebrada excepto numa vizinhança de raio $\frac{1}{n}$ de $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$; uma vez que o comprimento de Minkowski é sempre majorado pelo comprimento Euclidiano,

$$\int_a^b \sqrt{|\dot{t}^2-\dot{x}^2|}\,d\tau \le \int_a^b \sqrt{\dot{t}^2+\dot{x}^2}\,d\tau,$$

estes caminhos podem ser escolhidos de forma a que os seus comprimentos convirjam para zero, e portanto não pode existir um caminho de comprimento mínimo.

e) Considere-se o caminho $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ dado por $c(\tau)=(\tau,\cos\tau,\operatorname{sen}\tau)$. Este caminho une os pontos $(0,1,0)$ e $(2\pi,1,0)$, e o correspondente vector velocidade

$$\dot{c}(\tau)=\dot{t}\frac{\partial}{\partial t}+\dot{x}\frac{\partial}{\partial x}+\dot{y}\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial t}-\operatorname{sen}\tau\frac{\partial}{\partial x}+\cos\tau\frac{\partial}{\partial y}$$

é nulo:

$$\langle\dot{c}(\tau),\dot{c}(\tau)\rangle=1-\operatorname{sen}^2\tau-\cos^2\tau=0.$$

Conseqeuntemente, o comprimento deste caminho é zero. No entanto, este caminho não é uma geodésica, uma vez que, sendo as componentes da métrica de Minkowski em coordenadas (t,x,y) constantes, os símbolos de Christoffel associados a estas coordenadas são nulos e portanto as geodésicas são rectas nestas coordenadas (e não hélices).

2. **(Problema Braquistócrono)**: Uma partícula de massa m move-se sobre uma curva $y=y(x)$ sob a acção do campo gravitacional constante, $U=mgy$. A curva satisfaz $y(0)=y(d)=0$ e $y(x)<0$ para $0<x<d$.

a) Supondo que a partícula é largada da origem com velocidade nula, mostre que a norma da sua velocidade é

$$v=\sqrt{-2gy}.$$

Conclua que o tempo que a partícula demora a viajar entre a origem e o ponto $(d,0)$ é

$$S=\int_0^d \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{-2gy}}dx=(2g)^{-\frac{1}{2}}\int_0^d (1+y'^2)^{\frac{1}{2}}(-y)^{-\frac{1}{2}}dx$$

onde $y'=\frac{dy}{dx}$.

b) Escreva uma equação diferencial para a curva $y=y(x)$ que leva a partícula a viajar entre os dois pontos em tempo mínimo. Mostre que esta equação pode ser reduzida a

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1+y'^2\right)y\right]=0.$$

c) Verifique que a solução da equação acima que satisfaz $y(0) = y(d) = 0$ é dada parametricamente por

$$\begin{cases} x = R\theta - R\operatorname{sen}\theta \\ y = -R + R\cos\theta \end{cases}$$

onde $d = 2\pi R$. (Esta curva chama-se uma *ciclóide*, e é a curva descrita por um ponto numa circunferência que roda sem escorregar sobre o eixo dos xx).

Resolução: A conservação da energia mecânica implica

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy = 0$$

já que inicialmente $y = \dot{x} = \dot{y} = 0$. Portanto a norma da velocidade é dada por

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = -gy \Leftrightarrow v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{-2gy}.$$

Uma vez que

$$\dot{y} = \frac{dy}{dx}\dot{x} = y'\dot{x},$$

concluimos que

$$\dot{x}^2 + y'^2\dot{x}^2 = -gy \Leftrightarrow \dot{x}^2 = \frac{-2gy}{1+y'^2} \Leftrightarrow \dot{x} = \frac{\sqrt{-2gy}}{\sqrt{1+y'^2}}$$

(uma vez que claramente $\dot{x} > 0$). Portanto o tempo de trânsito é

$$\int_0^d \frac{dt}{dx}dx = \int_0^d \frac{1}{\dot{x}}dx = \int_0^d \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{-2gy}}dx.$$

A existir uma curva que corresponde ao tempo de trânsito mínimo, ela deve ser uma solução da equação de Euler-Lagrange para o Lagrangeano

$$L(y, y', x) = (1+y'^2)^{\frac{1}{2}}(-y)^{-\frac{1}{2}},$$

i.e., de

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 &\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(y'(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}}(-y)^{-\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{2}(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}(-y)^{-\frac{3}{2}} = 0 \\
&\Leftrightarrow y''(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}}(-y)^{-\frac{1}{2}} - y'^2y''(1+y'^2)^{-\frac{3}{2}}(-y)^{-\frac{1}{2}} \\
&\quad + \frac{1}{2}y'^2(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}}(-y)^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}(-y)^{-\frac{3}{2}} = 0 \\
&\Leftrightarrow y''(-y) - \frac{1}{2}(1+y'^2) = 0 \\
&\Leftrightarrow 2y'y''y + y'(1+y'^2) = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left[\left(1+y'^2\right)y\right] = 0.
\end{aligned}$$

É interessante notar que esta quantidade conservada é basicamente o Hamiltoniano:

$$
\begin{aligned}
H = \frac{\partial L}{\partial y'}y' - L &= y'^2(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}}(-y)^{-\frac{1}{2}} - (1+y'^2)^{\frac{1}{2}}(-y)^{-\frac{1}{2}} \\
&= -(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}}(-y)^{-\frac{1}{2}} = -\left[-(1+y'^2)y\right]^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

A curva dada parametricamente por

$$
\begin{cases} x = R\theta - R\operatorname{sen}\theta \\ y = -R + R\cos\theta \end{cases}
$$

satisfaz $(x,y) = (0,0)$ para $\theta = 0$ e $(x,y) = (2\pi R, 0) = (d,0)$ para $\theta = 2\pi$. Além disso, tem-se para esta curva

$$
y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{-R\operatorname{sen}\theta}{R - R\cos\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta - 1}
$$

e portanto

$$
(1+y'^2)y = \frac{\cos^2\theta + 1 - 2\cos\theta + \operatorname{sen}^2\theta}{(\cos\theta - 1)^2}R(\cos\theta - 1) = -2R
$$

é constante. Concluimos que esta curva é um ponto crítico do tempo de trânsito (e na realidade pode mostrar-se que se trata de um mínimo absoluto).

Usando o parâmetro $\theta \in]0, 2\pi[$ como coordenada, o movimento da partícula ao longo da curva é um movimento do sistema mecânico com Lagrangeano

$$
\begin{aligned}
L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy &= \frac{1}{2}mR^2\left((1-\cos\theta)^2 + \operatorname{sen}^2\theta\right)\dot{\theta}^2 - mgR(\cos\theta - 1) \\
&= \frac{1}{2}mR^2(2 - 2\cos\theta)\dot{\theta}^2 - mgR(\cos\theta + 1 - 2) \\
&= \frac{1}{2}4mR^2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\dot{\theta}^2 - 2mgR\left(\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1\right)
\end{aligned}
$$

Introduzindo a coordenada $z \in]-1, 1[$ definida por

$$
z = -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow \dot{z} = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\dot{\theta}
$$

podemos reescrever o Lagrangeano como

$$
L = \frac{1}{2}8mR^2\dot{z}^2 - 2mgR(z^2 - 1);
$$

As equações de Euler-Lagrange para este Lagrangeano são obviamente as mesmas que para

$$
\tilde{L} = \frac{1}{2}\dot{z}^2 - \frac{1}{4}\frac{g}{R}z^2,
$$

que é o Lagrangeano para um oscilador harmónico unidimensional com frequência

$$
\omega = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{R}}.
$$

Concluimos que o movimento de uma partícula sobre a curva braquistócrona é oscilatório com período

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 4\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

(isto independentemente do ponto da curva em que seja largada a massa! Este facto já teve aliás alguma importância na construção de relógios de pêndulo exactos). Em particular, o tempo de trânsito entre $(0,0)$ e$(d,0)$ na curva braquistócrona é

$$t_{BR} = \frac{T}{2} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Para a linha quebrada

$$\left[(0,0);\left(\frac{d}{2},-\frac{d}{2}\right)\right] \cup \left[\left(\frac{d}{2},-\frac{d}{2}\right);(d,0)\right],$$

por exemplo, o tempo de trânsito é

$$t_{LQ} = 2\int_0^{\frac{d}{2}} \frac{\sqrt{1+1^2}}{\sqrt{2gx}}dx = \frac{2}{\sqrt{g}}\left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_0^{\frac{d}{2}} = 4\sqrt{\frac{d}{2g}} = 4\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{R}{g}} > t_{BR},$$

já que

$$\frac{t_{BR}}{t_{LQ}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{4}} < 1.$$

O problema braquistócrono (do grego braquis = mais curto, cronos = tempo), posto por Bernoulli em 1696, é considerado o primeiro problema de Cálculo de Variações; foi resolvido independentemente, entre outros, pelo próprio Bernoulli, Leibniz e Newton.