

6ª ficha de exercícios de Mecânica Geométrica

4 de Junho de 2003

1. Considere uma superfície de revolução $Q \subset \mathbb{R}^3$ descrita em coordenadas cilíndricas (r, θ, z) por

$$r = f(z)$$

onde $f :]z_-, z_+[\rightarrow \mathbb{R}^+$ é C^∞ e limitada.

- (a) Mostre que as geodésicas de Q são os pontos críticos da acção correspondente ao Lagrangeano $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ dado em coordenadas locais por

$$L(\theta, z, \dot{\theta}, \dot{z}) = \frac{1}{2} \left((f(z))^2 \dot{\theta}^2 + ((f'(z))^2 + 1) \dot{z}^2 \right).$$

- (b) Mostre que as curvas $\theta = \text{constante}$ e as curvas $f'(z) = 0$ (caso existam) são (imagens de) geodésicas.
- (c) Determine a transformação de Legendre, mostre que L é hiper-regular e escreva a expressão do Hamiltoniano $H : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$.
- (d) Mostre que H é completamente integrável.
- (e) Mostre que a projecção do toro/cilindro invariante

$$M_{(E,l)} = \{p_\theta d\theta + p_z dz \in T^*Q : H = E, p_\theta = l\} \quad (E, l > 0)$$

em Q é dada em coordenadas locais por

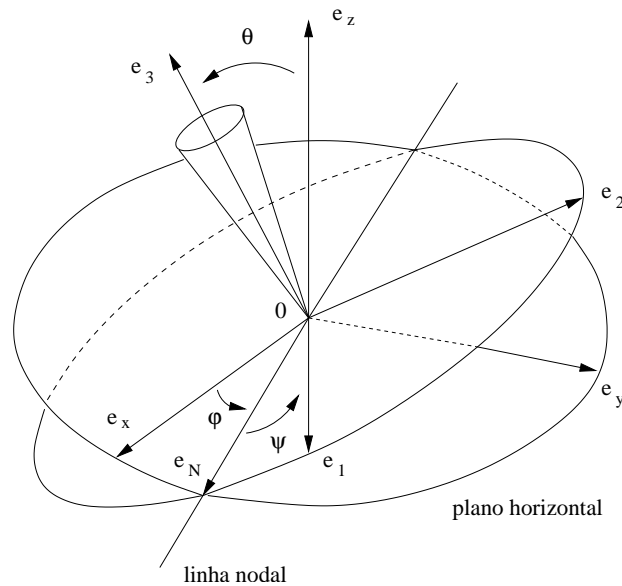
$$f(z) \geq \frac{l}{\sqrt{2E}}.$$

Use este facto para concluir que se f tem um máximo estrito em $z = z_0$ então a geodésica (de imagem) $z = z_0$ é *estável*, i.e., geodésicas com condição inicial próxima de $(\theta_0, z_0, 1, 0) \in TQ$ mantêm-se próximas de $z = z_0$. Confirme a sua conclusão indicando um exemplo.

2. Recorde que o *pião de Lagrange* é descrito pelo Lagrangeano $L : TSO(3) \rightarrow \mathbb{R}$ dado em coordenadas locais por

$$L = \frac{I_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 - Mgl \cos \theta,$$

onde (θ, φ, ψ) são os ângulos de Euler, M é a massa do pião e l é a distância do seu centro de massa ao ponto fixo.



- (a) Escreva as equações do movimento e determine os pontos de equilíbrio.
 (b) Mostre que existem soluções tais que θ , $\dot{\varphi}$ e $\dot{\psi}$ são constantes. Mostre ainda que no limite $|\dot{\varphi}| \ll |\dot{\psi}|$ (pião *veloz*) o pião *precessa* com velocidade angular

$$\dot{\varphi} \simeq \frac{Mgl}{I_3 \dot{\psi}}$$

quando o seu movimento é descrito por uma destas soluções.

- (c) Determine a transformação de Legendre, mostre que L é hiper-regular e escreva a expressão do Hamiltoniano $H : T^*SO(3) \rightarrow \mathbb{R}$.
 (d) Prove que H é completamente integrável.
 (e) Mostre que as soluções encontradas na alínea (b) percorrem toros degenerados (de dimensão 2). Use este facto para argumentar que o resultado que obteve na alínea (b) permanece válido quando existe *nutation* (i.e., quando θ não é constante mas oscila com pequena amplitude em torno de uma posição de equilíbrio θ_0).