Ficha de exercícios extra de Mecânica Geométrica

11 de Junho de 2003

1 val. 1. Considere a sucessão formada pelo primeiro dígito na expansão decimal de cada um dos inteiros da forma 2^n para $n \in \mathbb{N}_0$:

$$1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, \ldots$$

O objectivo deste exercício é responder à seguinte questão: existe algum 7 nesta sucessão? Em caso afirmativo, qual é o dígito que ocorre mais frequentemente, 7 ou 8?

a) Mostre que se $\frac{\omega}{2\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ então

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} e^{i\omega k} = 0.$$

(**Sugestão:** *Recorde que existe uma fórmula para a soma dos $n+1$ primeiros termos de uma progressão geométrica*).

b) Prove a seguinte versão discreta do Teorema Ergódico: se $f : S^1 \to \mathbb{R}$ é integrável à Riemann e $\frac{\omega}{2\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ então para qualquer $\varphi \in S^1$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f(\varphi + \omega k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi.$$

c) Mostre que $\log 2$ é um múltiplo irracional de $\log 10$.

d) Responda à questão inicialmente colocada.

2 val. 2. O objectivo deste exercício é determinar coordenadas acção-ângulo para o problema de Kepler. Recorde que o Hamiltoniano $H : T^*(\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}) \to \mathbb{R}$ deste problema é dado em coordenadas polares por

$$H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\theta^2}{2r^2} - \frac{M}{r}.$$

a) Mostre que $F_1 = H$ e $F_2 = p_\theta$ são primeiros integrais em involução, independentes em $T^*(\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}) \setminus C$, onde

$$C = \left\{ p_r dr + p_\theta d\theta \in T^*(\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}) : p_r = 0 \text{ e } p_\theta^2 = Mr \right\}.$$

Explique porque é que C tem que ser um conjunto invariante para o fluxo Hamiltoniano de H, e mostre que o fluxo neste conjunto consiste em órbitas circulares com velocidade angular constante.

b) Supomos deste ponto em diante que $l > 0$. Mostre que o conjunto de nível

$$M_{(E,l)} = \left\{ p_r dr + p_\theta d\theta \in T^*(\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}) : \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\theta^2}{2r^2} - \frac{M}{r} = E \text{ e } p_\theta = l \right\}$$

é compacto *sse* $E < 0$. Mostre que $M_{(E,l)} \subset C$ *sse* $E = -\frac{M^2}{2l^2}$. (**Sugestão:** *Estude a variação de p_r ao longo de $M_{(E,l)}$*).

c) Escreva as equações do movimento, e use-as para mostrar que

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{p_r}{l}$$

donde

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = \frac{M}{l^2}.$$

d) Supondo $-\frac{M^2}{2l^2} < E < 0$, sabemos que $M_{(E,l)}$ é um toro, cuja projecção em $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ é uma coroa circular. Escrevendo

$$E = -\frac{M}{2a};$$
$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{l^2}{Ma}}$$

(com $a > \frac{l^2}{M}$, donde $0 < \varepsilon < 1$), mostre que a solução desta equação linear de coeficientes constantes é

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{l^2}(1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)) = \frac{1}{a(1-\varepsilon^2)}(1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)).$$

Esta é a equação em coordenadas polares de uma elipse de foco na origem, excentricidade ε e semieixo maior a formando um ângulo θ_0 com o eixo dos xx. Ao ângulo θ_0 costuma chamar-se o *argumento do periélio*, e ao ângulo $\theta - \theta_0$ a *anomalia real*.

e) Utilizando um sistema de eixos alinhado com o semieixo maior da elipse e centrado no centro desta, podemos parametrizar a elipse mediante

$$(x, y) = \left(a \cos\psi, a\sqrt{1-\varepsilon^2} \operatorname{sen}\psi\right)$$

(note que neste sistema de coordenadas o foco $r = 0$ tem coordenadas $(a\varepsilon, 0)$). Mostre que se tem

$$r = a(1 - \varepsilon \cos\psi).$$

Ao ângulo ψ costuma chamar-se a *anomalia excêntrica*.

f) Mostre que

$$W(r, \theta, E, l) = w(r) + l\theta,$$

onde

$$w(r) = \int_{r_-}^{r} \sqrt{2E + \frac{2M}{r} - \frac{l^2}{r^2}} dr$$

(sendo r_- a menor raiz do polinómio $2Er^2 + 2Mr - l^2$) é uma solução completa da equação de Hamilton-Jacobi reduzida

$$H\left(r, \theta, \frac{\partial W}{\partial r}, \frac{\partial W}{\partial \theta}\right) = E$$

que satisfaz

$$\frac{\partial W}{\partial r} = p_r;$$
$$\frac{\partial W}{\partial \theta} = p_\theta.$$

g) É fácil mostrar que (ψ, θ_0, E, l) são coordenadas locais numa vizinhança de qualquer toro invariante. Use este facto para mostrar que

$$2Er^2 + 2Mr - l^2 = Ma\varepsilon^2 \operatorname{sen}^2 \psi,$$

e que portanto

$$\xi = \frac{\partial W}{\partial E} = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{M^{\frac{1}{2}}} \left(\psi + \varepsilon \operatorname{sen} \psi\right).$$

Usando $l = r^2\dot{\theta}$, mostre ainda que

$$\frac{\partial W}{\partial l} = \theta_0.$$

Conclua que (ξ, θ_0, E, l) são coordenadas de Darboux.

h) Mostre que definindo

$$I = (Ma)^{\frac{1}{2}};$$
$$\varphi = \psi + \varepsilon \operatorname{sen} \psi,$$

se tem ainda que $(\varphi, \theta_0, I, l)$ são coordenadas de Darboux, nas quais

$$H = -\frac{M^2}{2I^2}.$$

Conclua que H é um Hamiltoniano degenerado e que todas as órbitas contidas em toros invariantes são periódicas com período

$$T = 2\pi \frac{a^{\frac{3}{2}}}{M^{\frac{1}{2}}}.$$

Como (E, l) parametrizam os toros invariantes e (φ, θ_0) são coordenadas naturais nestes, $(\varphi, \theta_0, I, l)$ são então coordenadas acção-ângulo para o problema de Kepler. Ao ângulo φ costuma chamar-se a *anomalia média*.