Corpo Rígido e Simetrias

Consideremos um corpo rígido com centro de massa na origem descrito pelo seu tensor de inércia I. Se $S \in O(3)$é uma isometria que preserva a distribuição de massa (e.g. uma simetria do corpo se este for homogéneo), então S preserva o tensor de inércia,

$$SIS^t = I.$$

Se S é uma reflexão, que podemos supor ser em relação ao plano $z = 0$,

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

obtemos

$$\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & -I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & -I_{23} \\ -I_{31} & -I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix},$$

donde $I_{13} = I_{23} = 0$ e portanto o eixo dos zz é um eixo principal de inércia.

Se S é uma rotação de algum ângulo $\alpha \neq 0$ em torno de algum eixo, que podemos supor ser o eixo dos zz,

$$S = \begin{pmatrix} R_\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

com

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix},$$

obtemos

$$R_\alpha \begin{pmatrix} I_{13} \\ I_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{13} \\ I_{23} \end{pmatrix}.$$

Fazendo a identificação $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ e pondo $z = (I_{13}, I_{23})$, vemos que

$$e^{i\alpha} z = z \Rightarrow z = 0$$

(já que $e^{i\alpha} \neq 1$), e portanto concluímos que o eixo dos zz é um eixo principal de inércia.

Se $\alpha = \pi$ (ou, equivalentemente, se S é uma reflexão em relação ao eixo dos zz), isto é tudo o que podemos concluir, já que neste caso

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se adicionalmente soubermos que $\alpha \neq \pi$, podemos concluir que qualquer recta pela origem contida no plano $z = 0$ é um eixo principal de inércia. De facto, temos

$$R_\alpha \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{pmatrix} R_{-\alpha} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{pmatrix}.$$

Seja $I : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a transformação $\mathbb{R}$-linear representada pela matriz acima. Como qualquer transformação $\mathbb{R}$-linear, I pode ser escrita na forma

$$I(z) = az + b\overline{z}$$

para algum $a, b \in \mathbb{C}$: de facto, se $I(1) = c$ e $I(i) = d$, temos

$$I(z) = I(x + iy) = xc + yd = \frac{z + \overline{z}}{2}c + \frac{z - \overline{z}}{2i}d = \frac{c - id}{2}z + \frac{c + id}{2}\overline{z}.$$

A relação acima escreve-se então

$$e^{i\alpha} I(e^{-i\alpha} z) = I(z) \Leftrightarrow e^{i\alpha}\left(ae^{-i\alpha} z + be^{i\alpha}\overline{z}\right) = az + b\overline{z} \Leftrightarrow be^{2i\alpha}\overline{z} = b\overline{z}$$

para todo o $z \in \mathbb{C}$. Uma vez que $e^{2i\alpha} \neq 1$, concluimos que $b = 0$, e portanto $I(z) = az$, ou seja,

$$\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(a) & -\mathrm{Im}(a) \\ \mathrm{Im}(a) & \mathrm{Re}(a) \end{pmatrix}.$$

Uma vez que esta matriz tem que ser simétrica, concluimos que $a \in \mathbb{R}$ e

$$\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$