

A Geometria Escondida

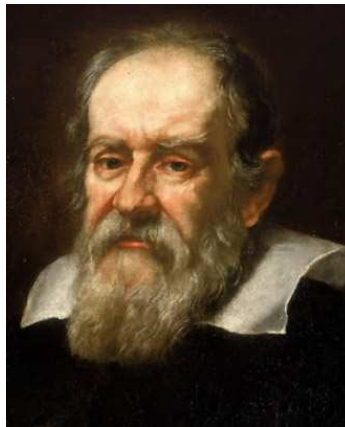
José Natário

(Instituto Superior Técnico)

Lisboa, Fevereiro de 2011

Galileu Galilei (1564–1642)

“A Filosofia [Ciência] está escrita neste grande livro, o Universo, que está permanentemente aberto e ao alcance do nosso olhar. Mas o livro não pode ser compreendido sem antes aprendermos a linguagem e os caracteres em que está escrito. A linguagem é a Matemática, e os caracteres são triângulos, círculos e outras figuras geométricas, sem as quais é humanamente impossível compreender uma única palavra.”



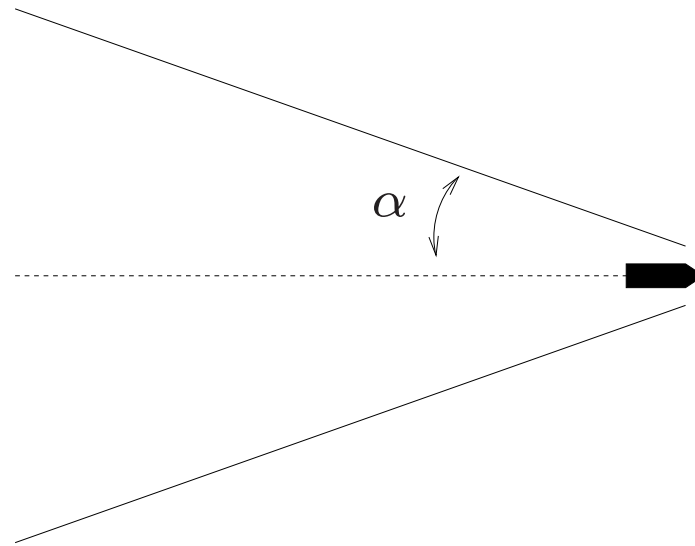


Manneken Pis (Bruxelas).





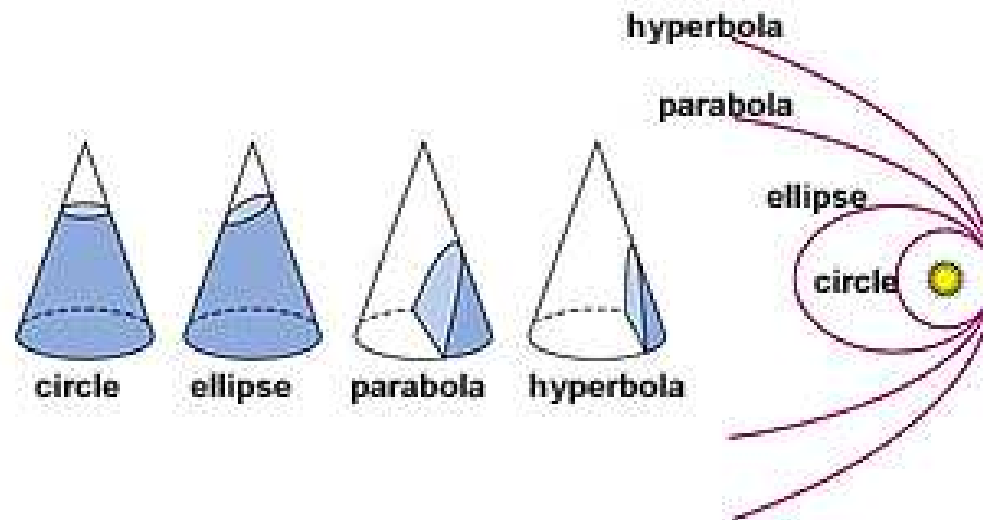
Teorema de Kelvin (1824–1907)



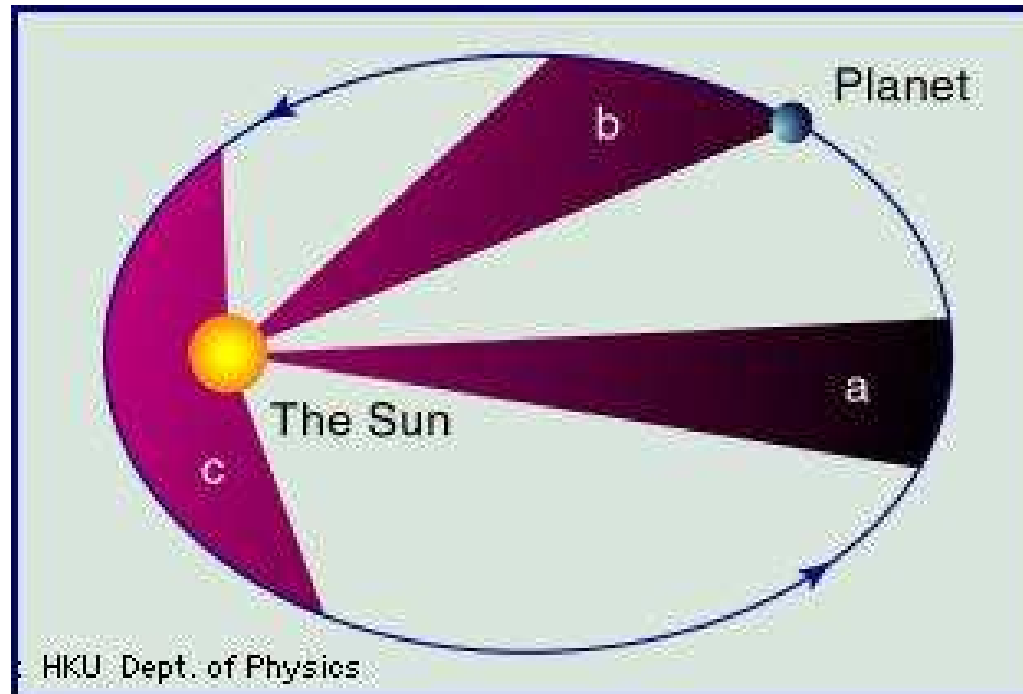
$$\sin \alpha = \frac{1}{3} \text{ (portanto } \alpha \simeq 19,5^\circ\text{).}$$

Leis de Kepler (1571–1630)

1. As órbitas dos corpos celestes são secções cónicas com o Sol num dos focos.

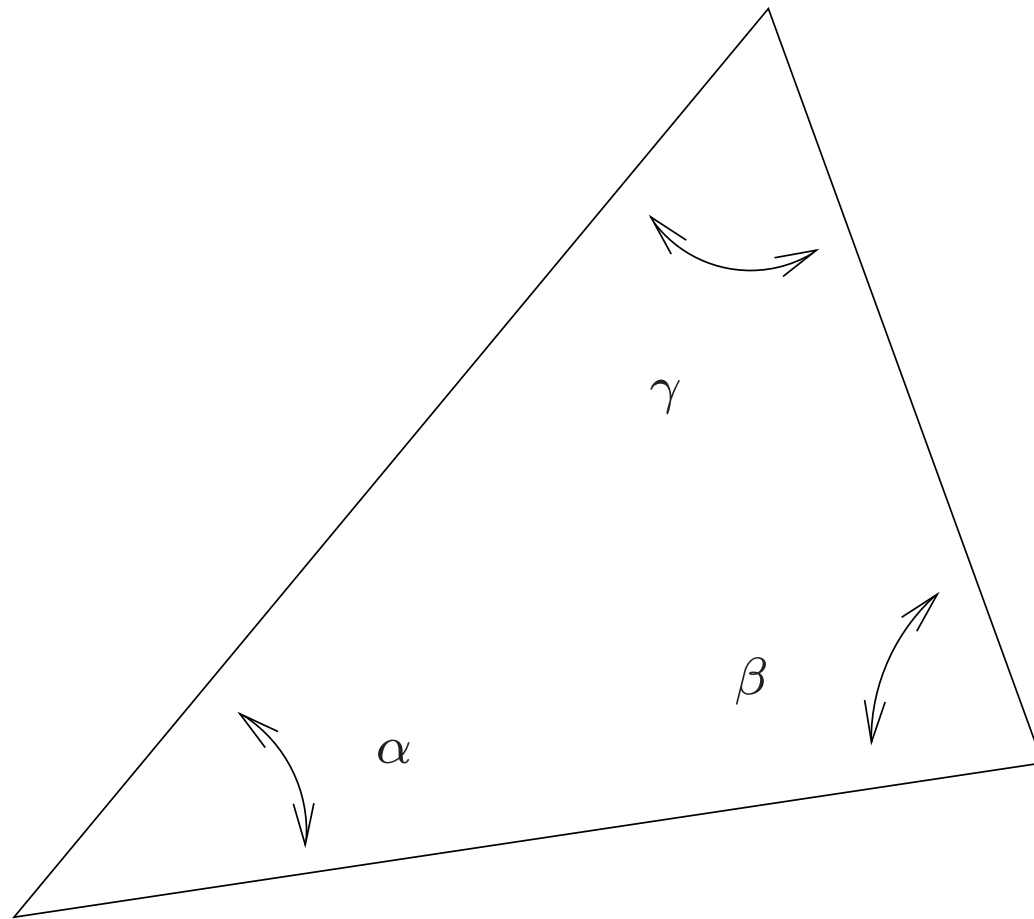


2. O segmento de recta que une o corpo ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais.



Geometria de Euclides (séc IV–III a.C.)

- Duas rectas distintas intersectam-se no máximo uma vez.
- Existem rectas que não se intersectam (paralelas).
- Os ângulos internos de um triângulo somam 180° .

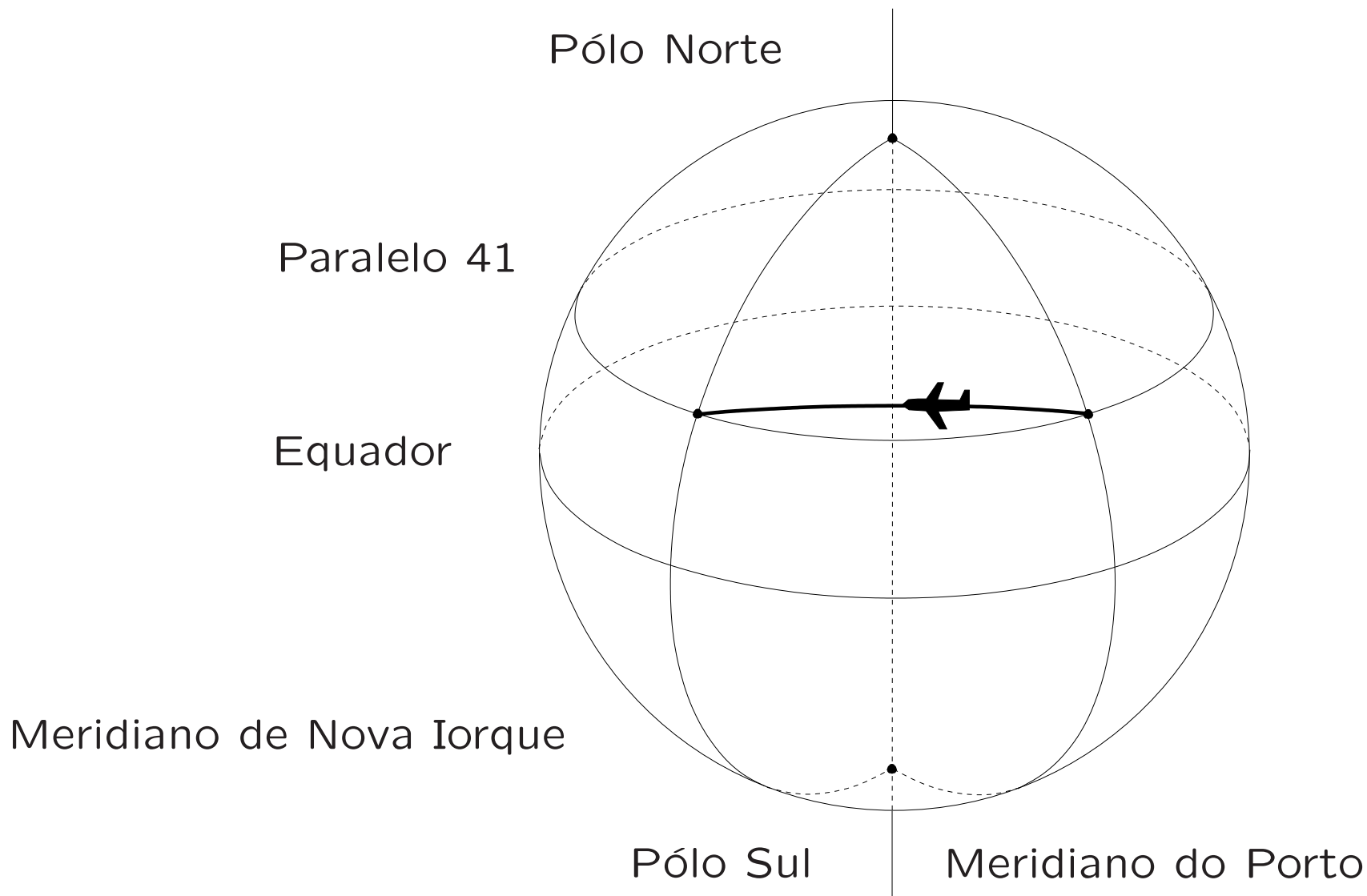


$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Geometria de Riemann (1826–1866)

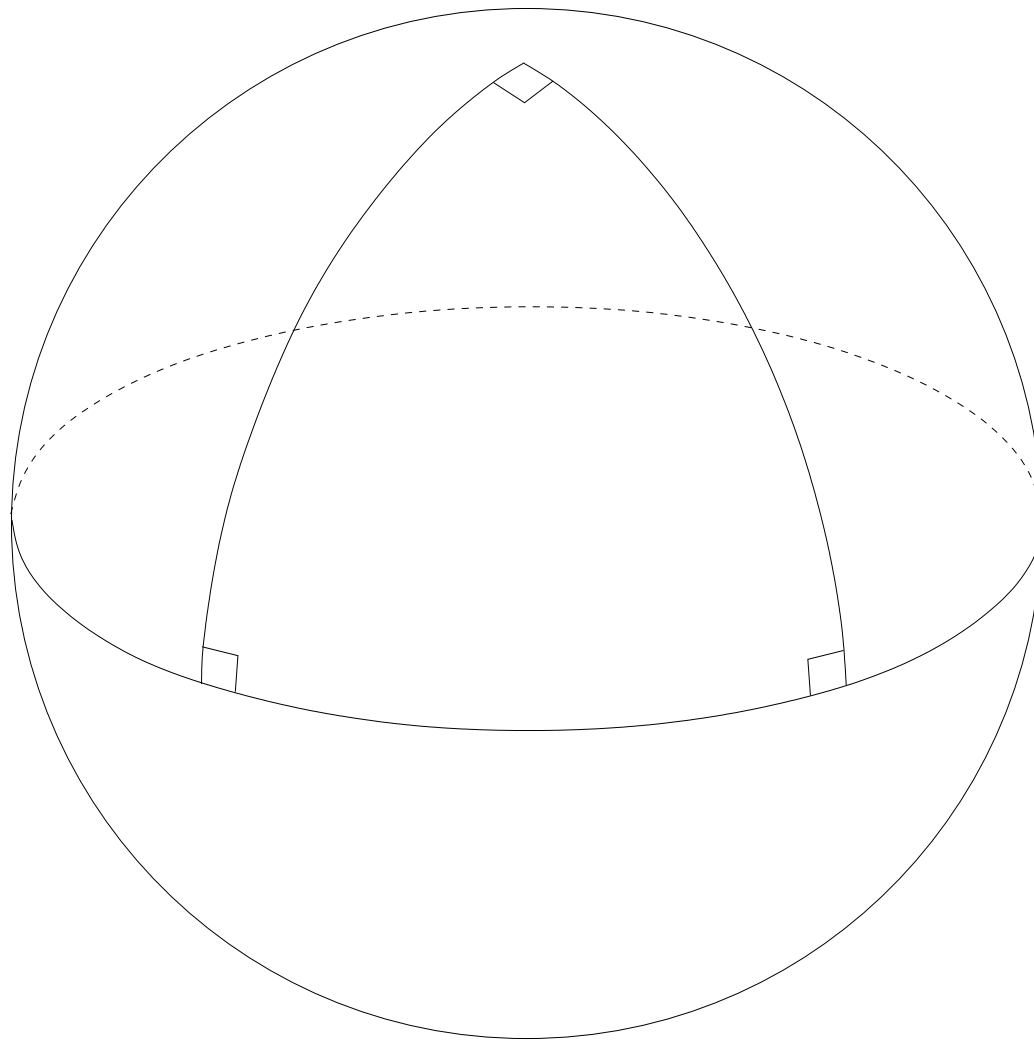
É a geometria das superfícies (espaços) curvos. Em vez de rectas temos **geodésicas** (curvas de comprimento mínimo).

Na esfera, por exemplo, as geodésicas são os círculos máximos, como o equador ou os meridianos. É por isso que para ir do Porto para Nova Iorque, o avião não voa para oeste.



Geometria da esfera

- Duas geodésicas distintas intersectam-se sempre em dois pontos (não existem paralelas).
- Os ângulos internos de um triângulo somam mais de 180° .

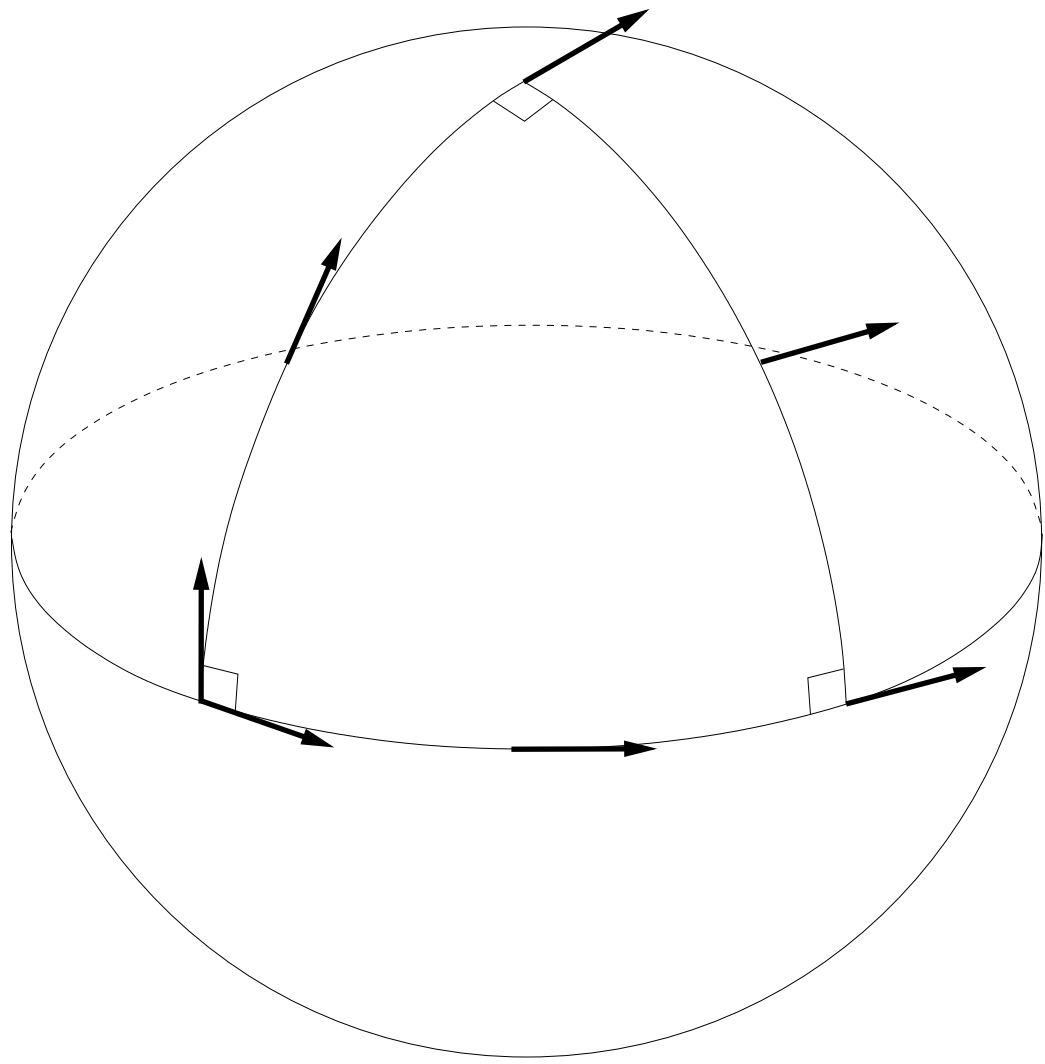


- Curvatura média = $\frac{\hat{\text{Ângulo em excesso}}}{\text{Área do triângulo}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{4\pi R^2}{8}} = \frac{1}{R^2}$.

- Na esfera, todos os triângulos possuem mesma curvatura média (superfície de curvatura constante). Em geral, a curvatura de uma superfície num ponto é o limite da curvatura média de triângulos cada vez mais pequenos.

Transporte paralelo

Um vector tangente que é transportado paralelamente ao longo de uma curva fechada regressa ao ponto inicial rodado de um ângulo igual ao excesso.

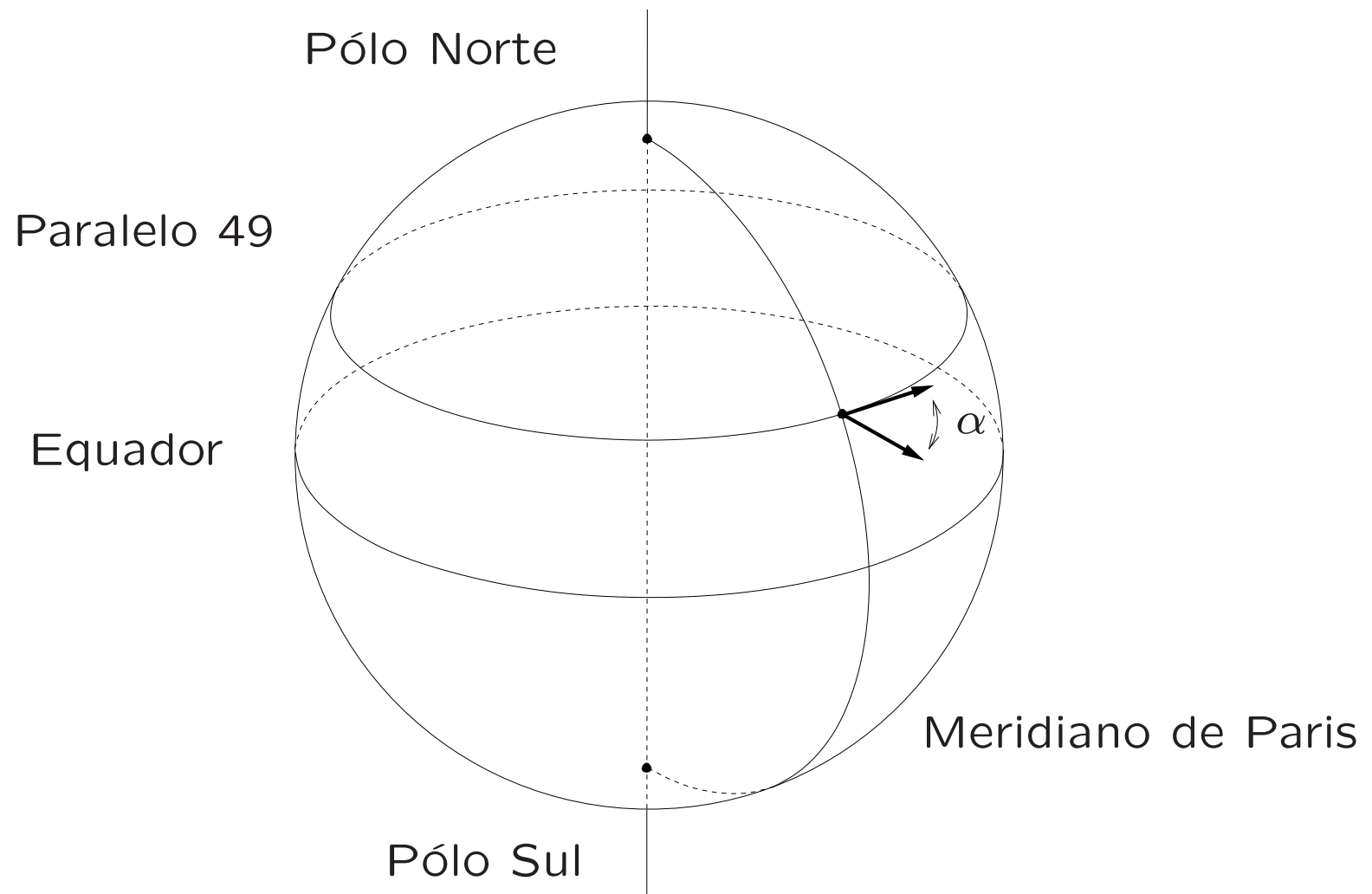


É o que acontece com o pêndulo de Foucault:





Pêndulo de Foucault do Panteão de Paris.



À latitude λ , o pêndulo de Foucault roda

$$\alpha = 2\pi - \overbrace{2\pi R(R - R \operatorname{sen} \lambda)}^{\text{excesso}} \underbrace{\frac{1}{R^2}}_{\text{curvatura}} = 2\pi \operatorname{sen} \lambda$$

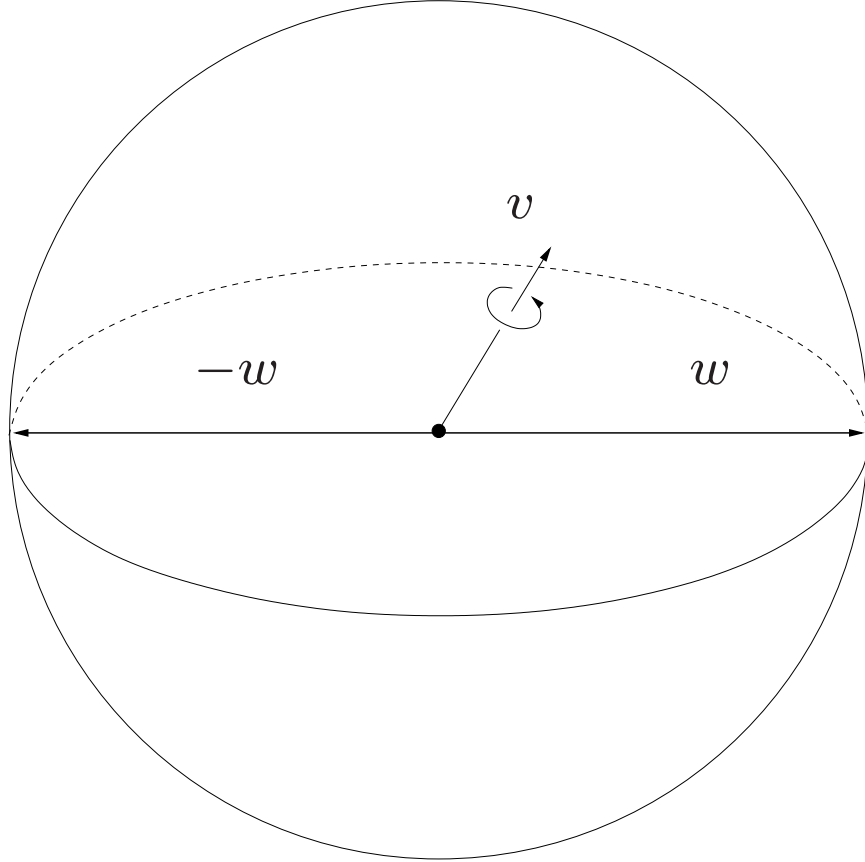
radianos por dia.

Corpo rígido



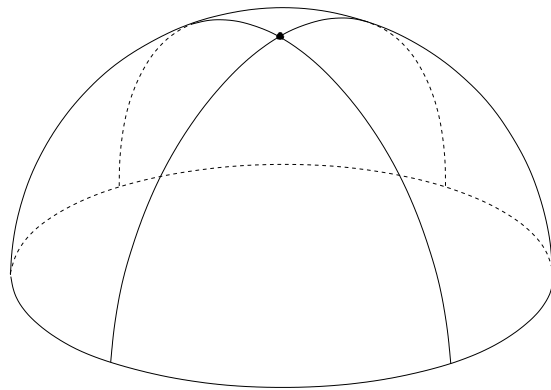
Asteróide Eros.

Qualquer posição do corpo é dada por um elemento do grupo das rotações $SO(3)$ aplicado a uma posição de referência. Portanto o movimento do corpo rígido corresponde a uma curva em $SO(3)$, que é uma geodésica para uma certa geometria (determinada pela energia cinética).

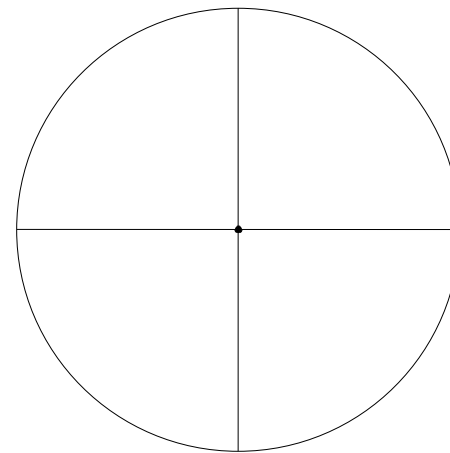


SO(3)

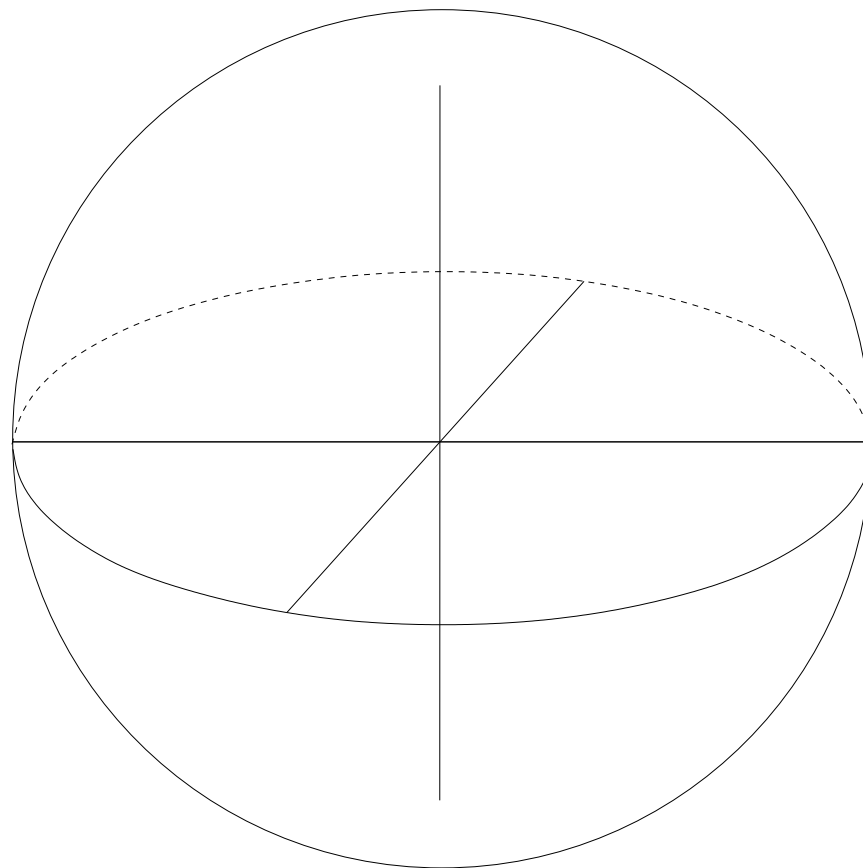
- v representa a rotação de um ângulo $\|v\|$ no sentido directo em torno de v .
- Se $\|w\| = \pi$ então w e $-w$ representam a mesma rotação.
- Portanto $SO(3) \cong \frac{S^3}{\{\pm 1\}} \cong \mathbb{R}P^3$.



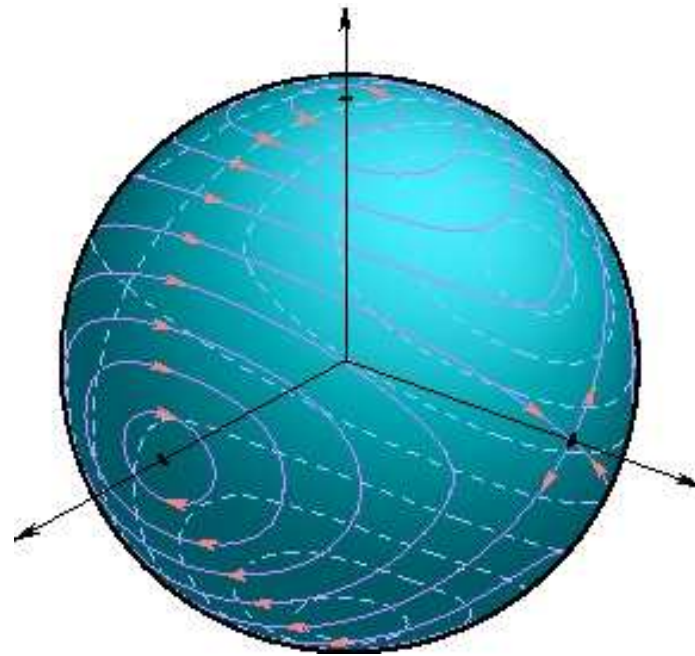
\cong



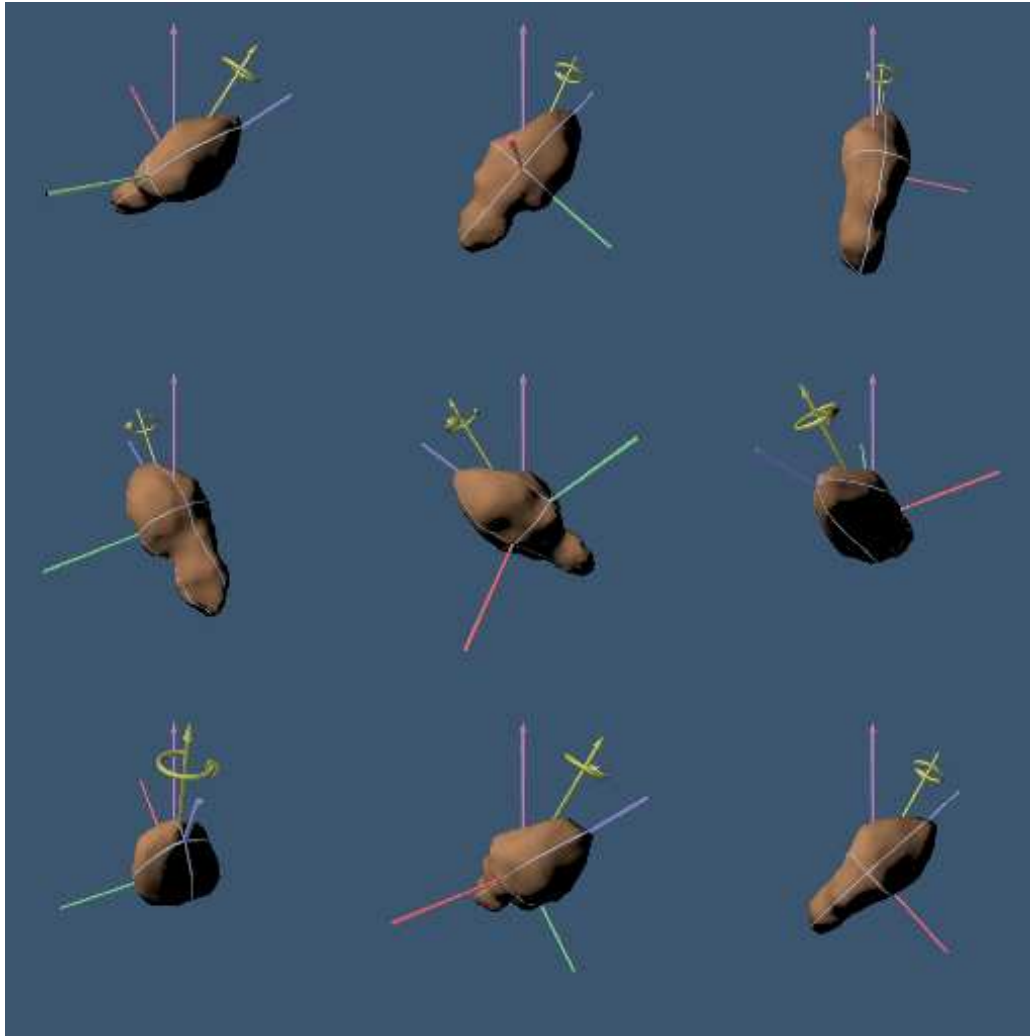
Se o corpo rígido é suficientemente simétrico, as geodésicas são exactamente as da esfera S^3 :



O caso geral é mais complicado:



Trajectórias do vector momento angular no corpo rígido.

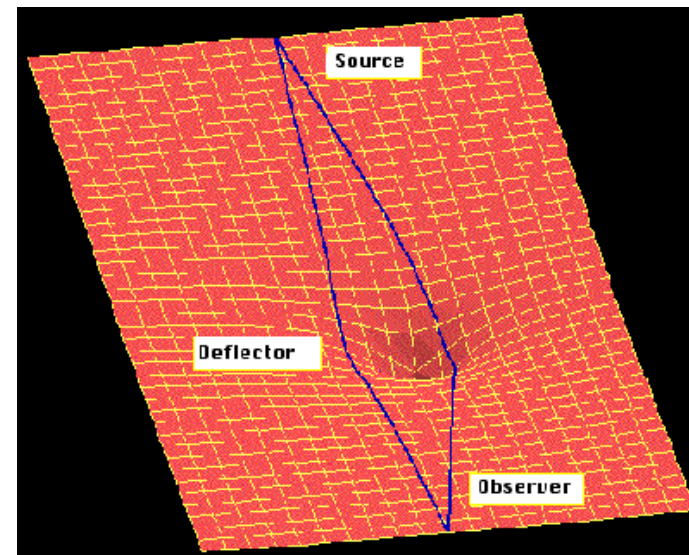
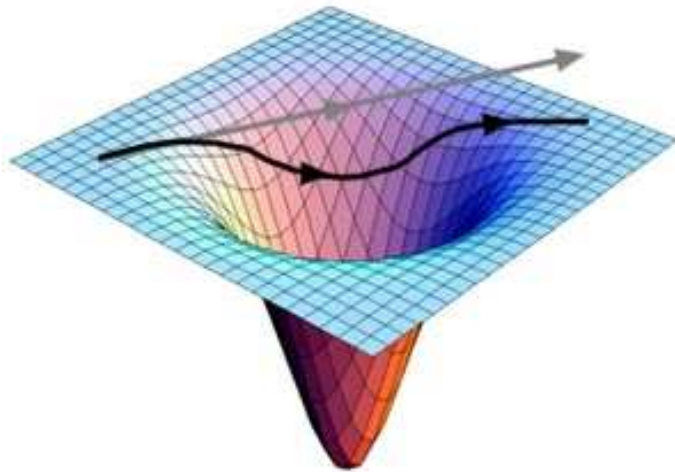


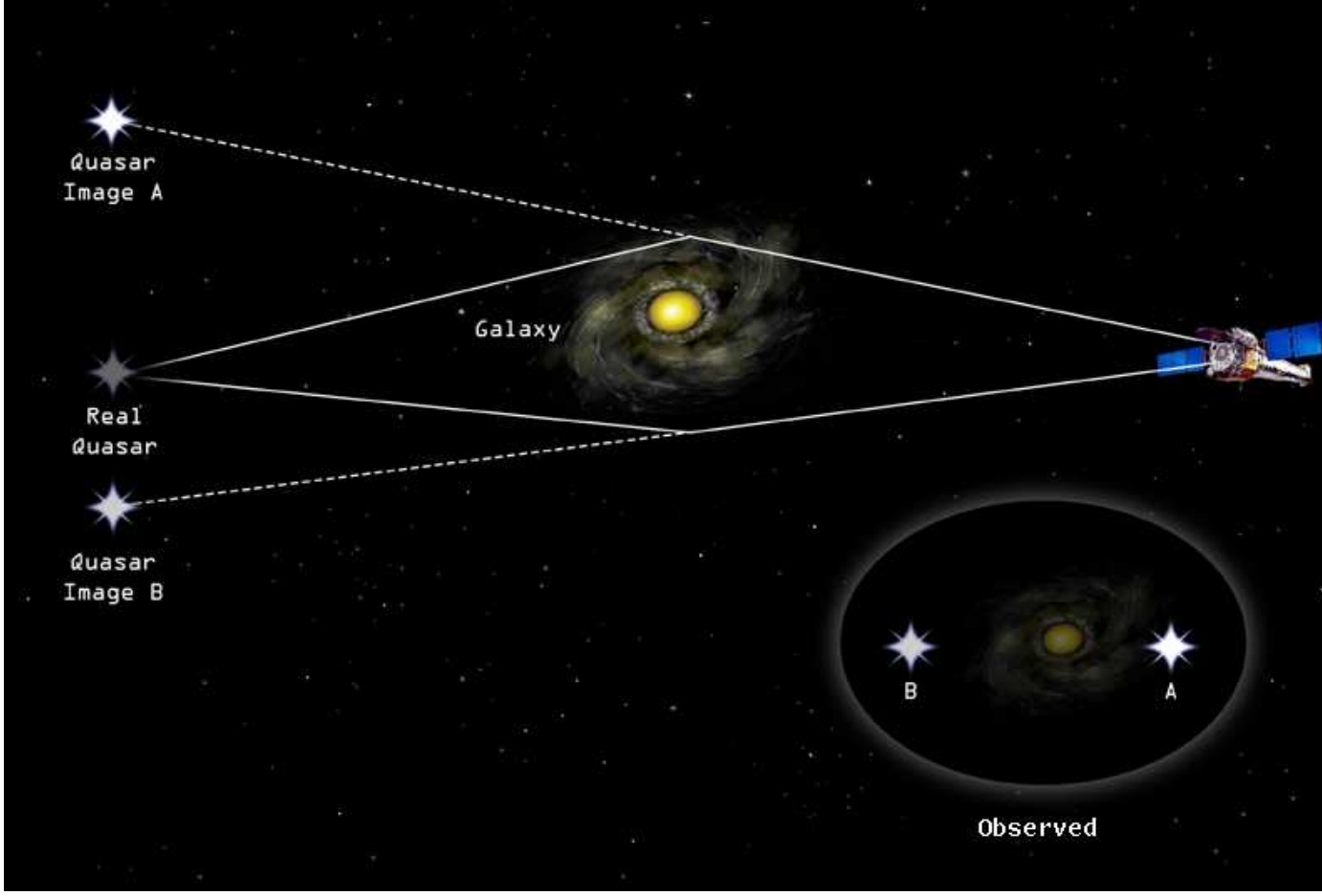
Asteróide Toutatis.

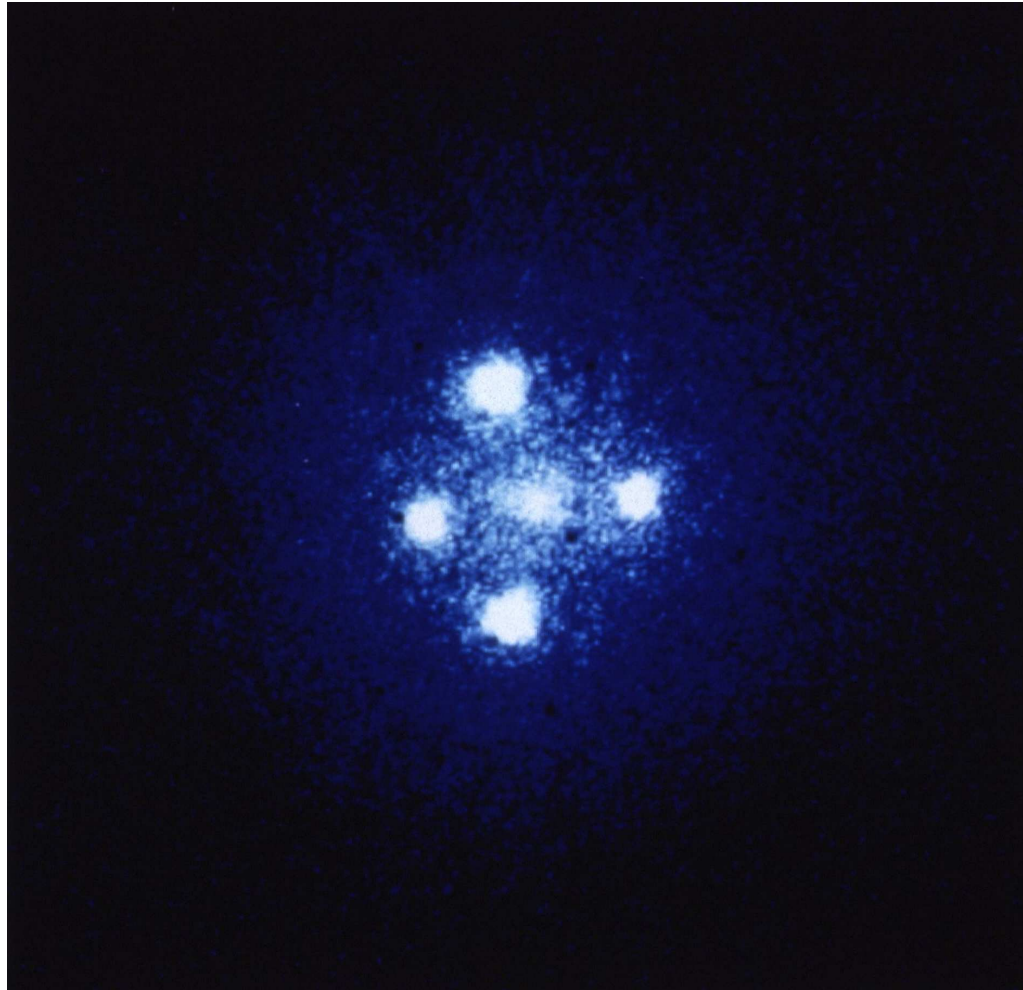
Einstein (1879–1955)

O espaço(-tempo) é curvo e os raios luminosos seguem geodésicas.

Uma consequência é o efeito de lente gravitacional, que origina imagens múltiplas de objectos astronômicos.





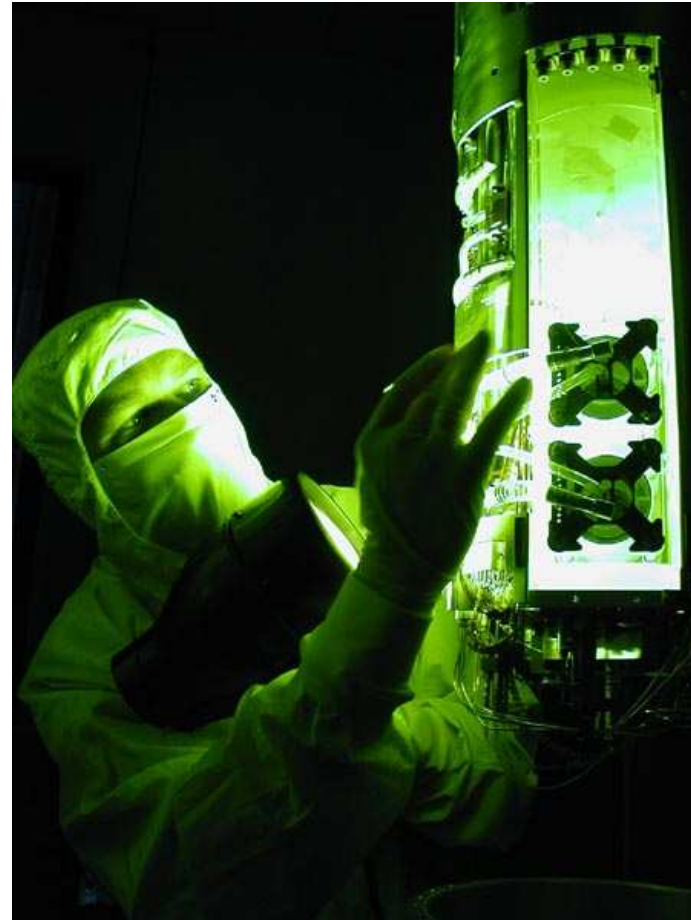


Cruz de Einstein.

Gravity Probe B (lançada em 2004)



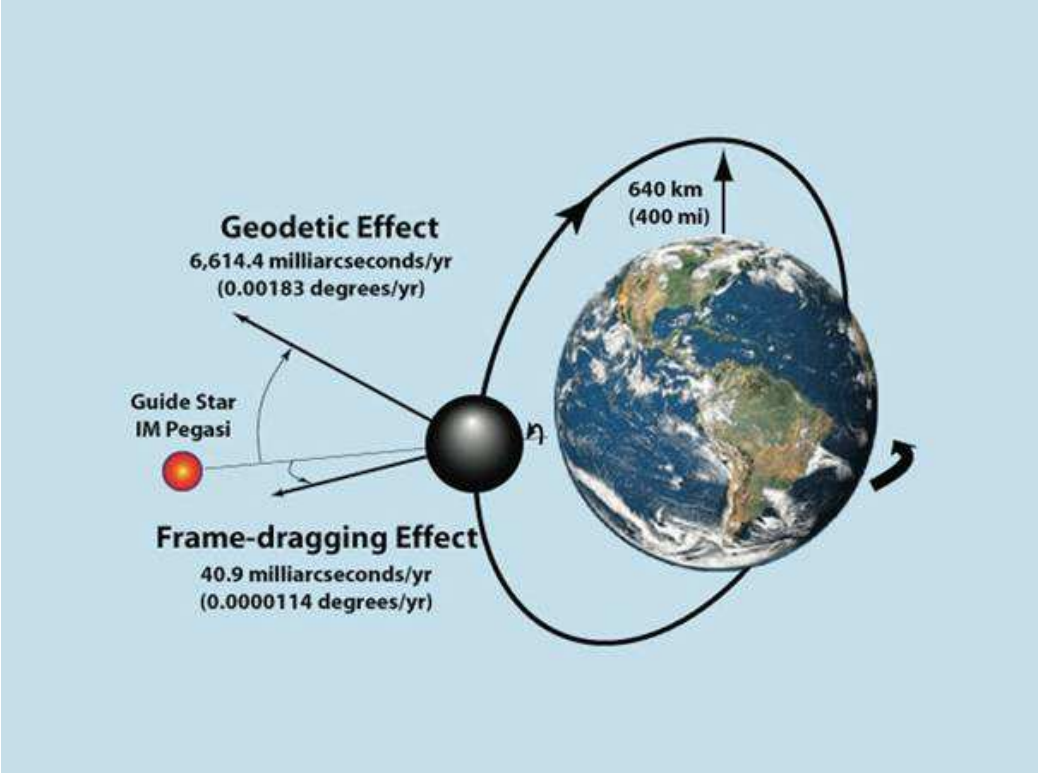
As esferas mais esféricas do mundo...



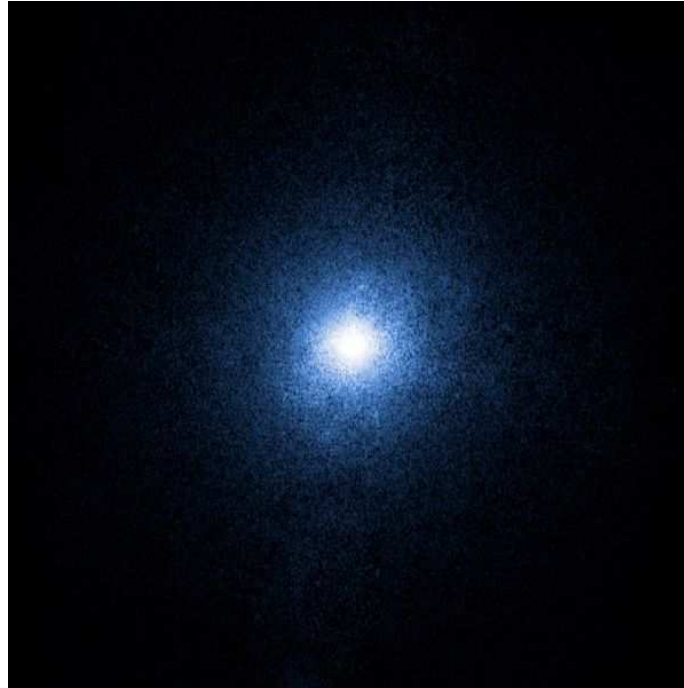
...arrefecidas abaixo de -271°C ...



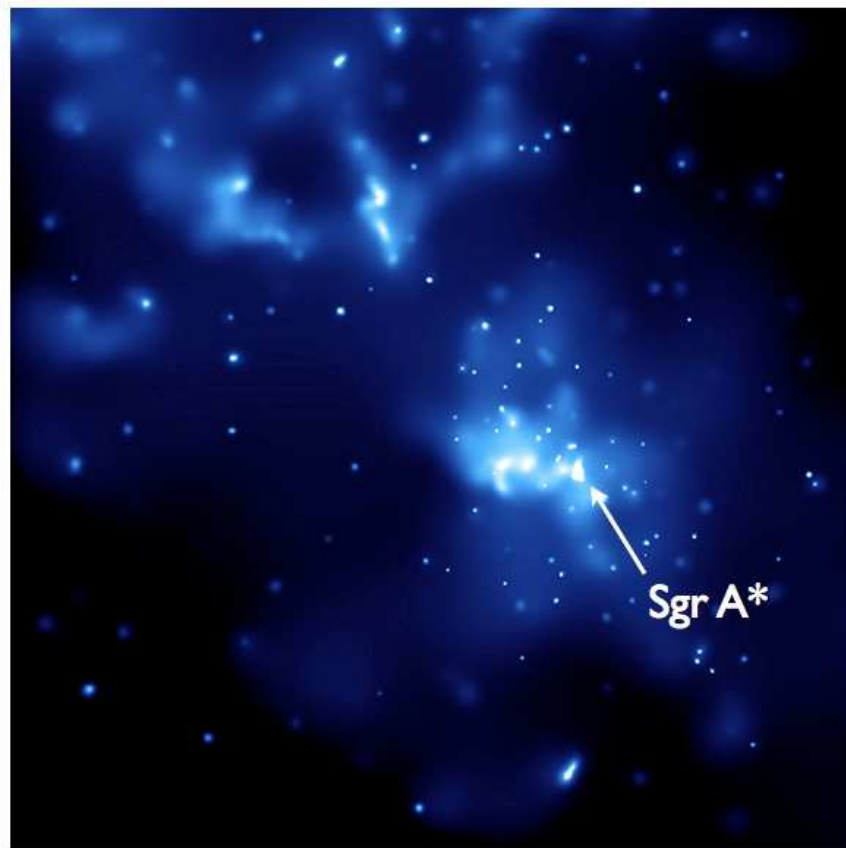
...foram colocadas a rodar em órbita.



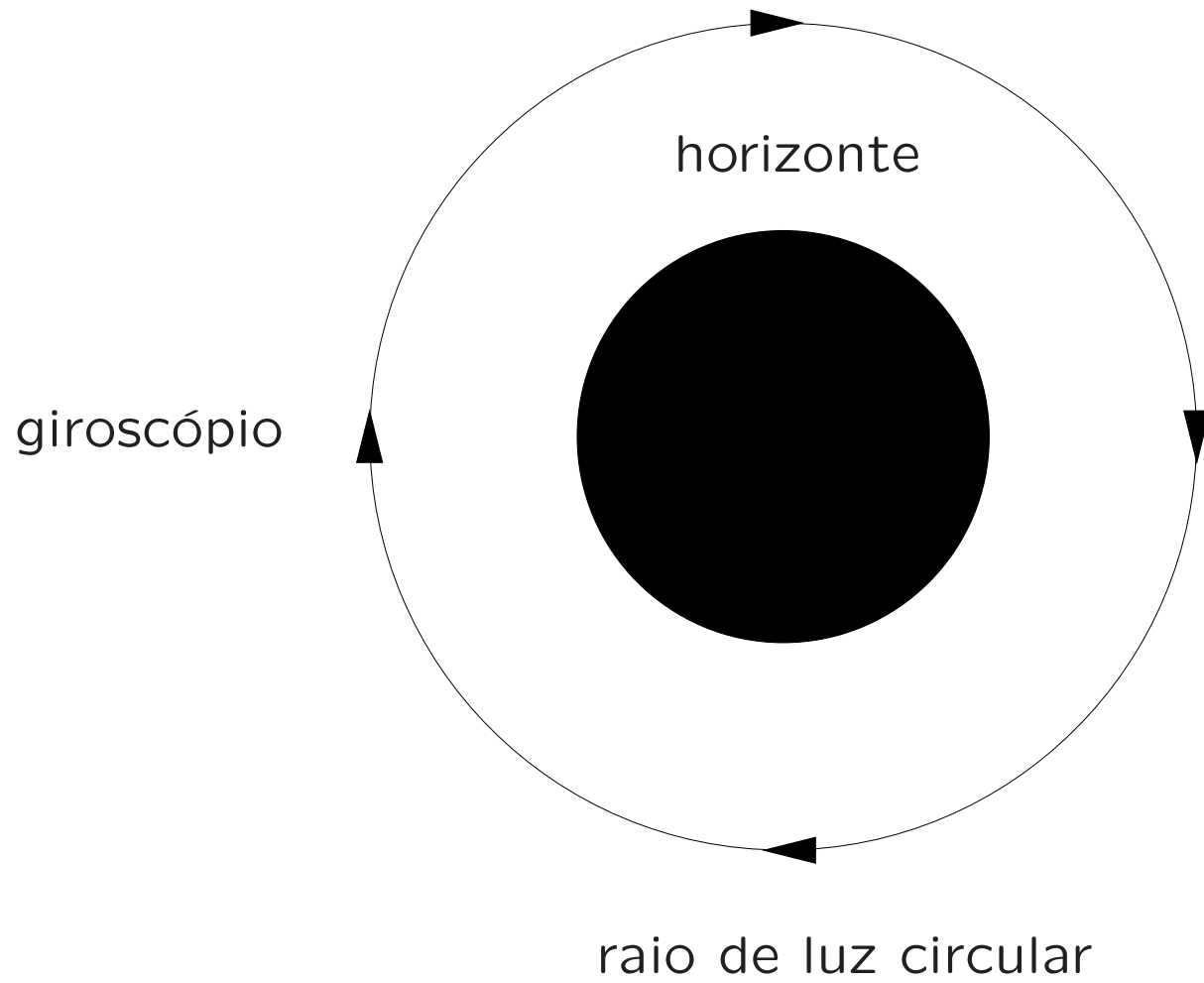
Buracos negros

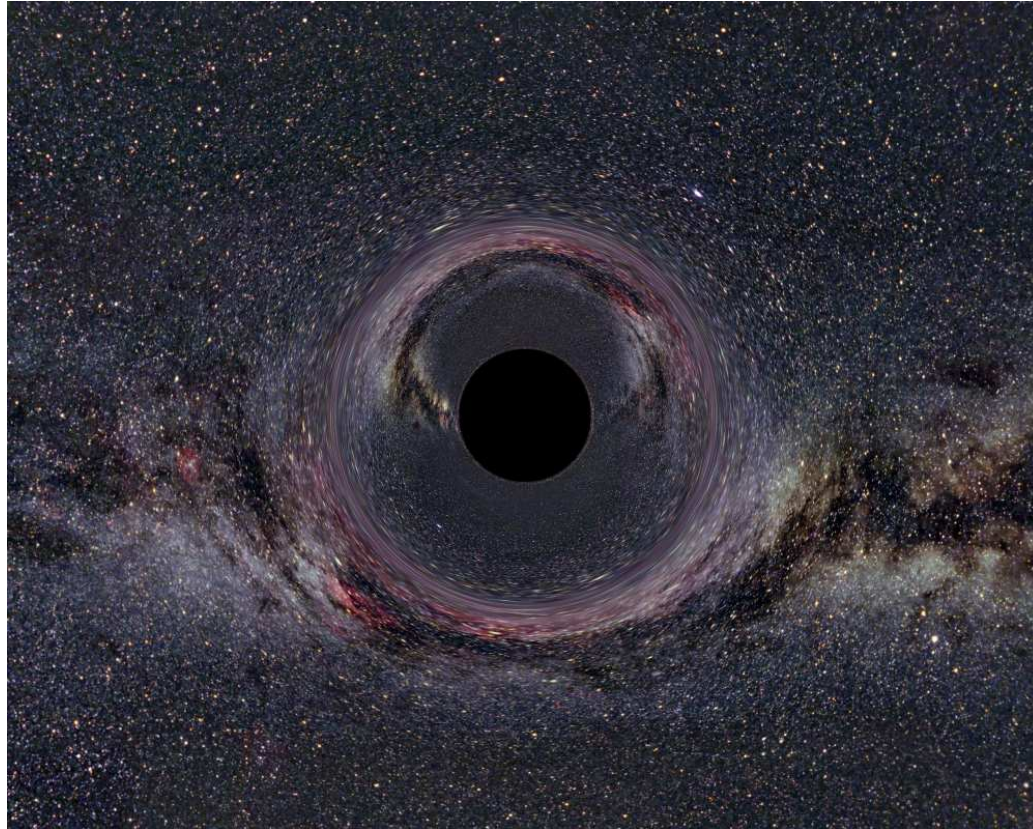


Cygnus X-1 (imagem de raios-X do telescópio Chandra).

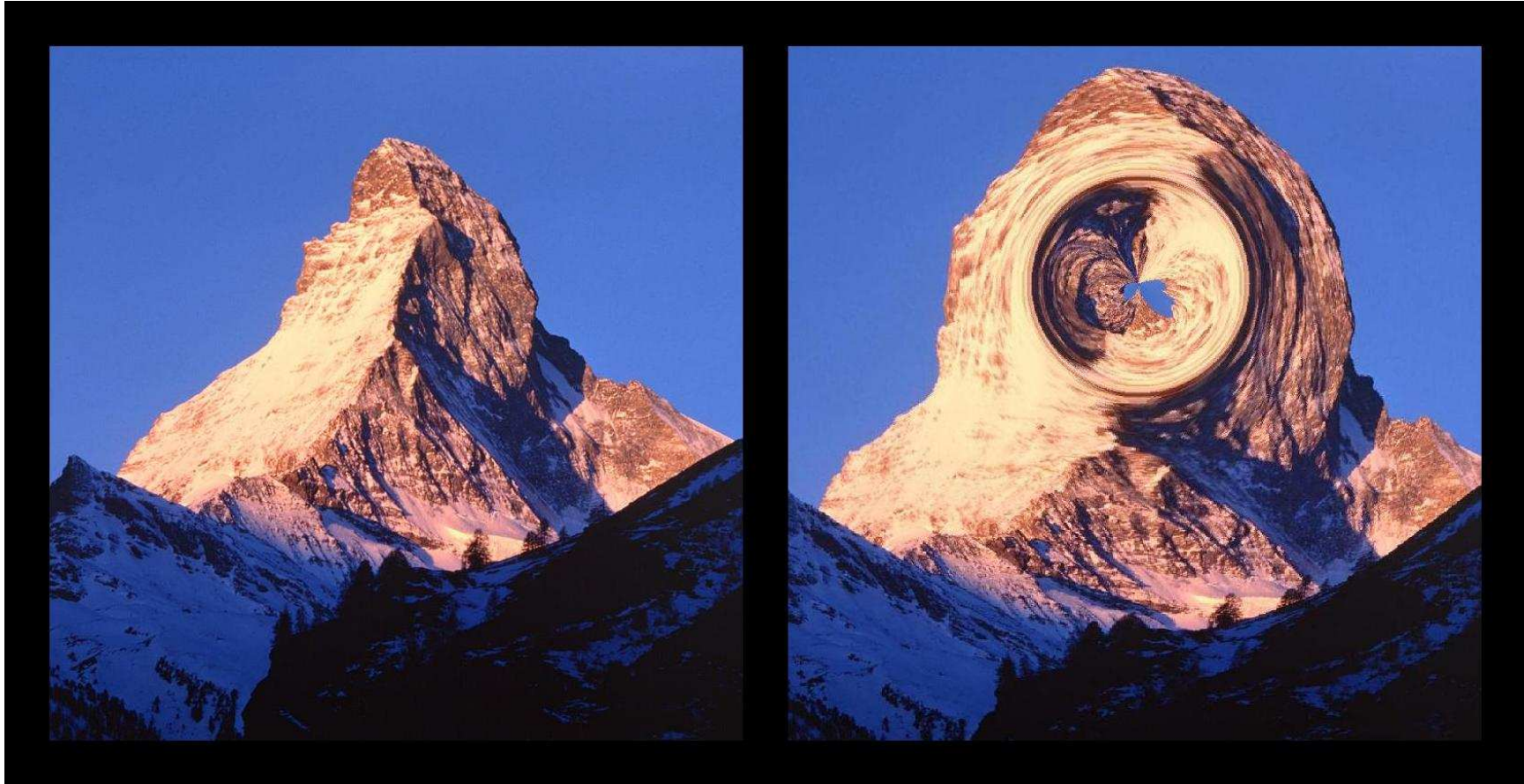


Sagittarius A* (imagem de raios-X do telescópio Chandra).





Buraco negro a 600 quilómetros...



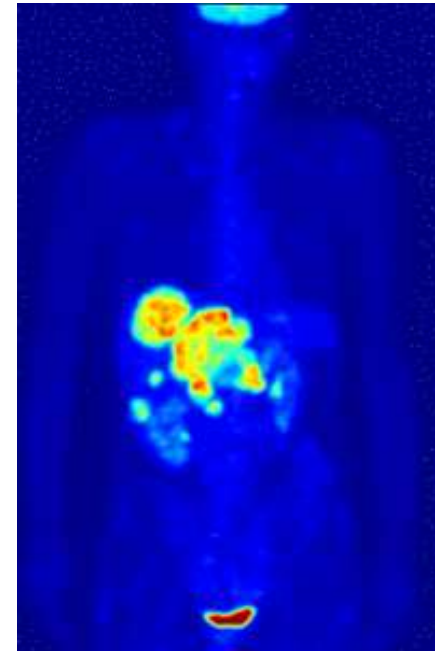
...e a 600 metros.

Teorias de Gauge

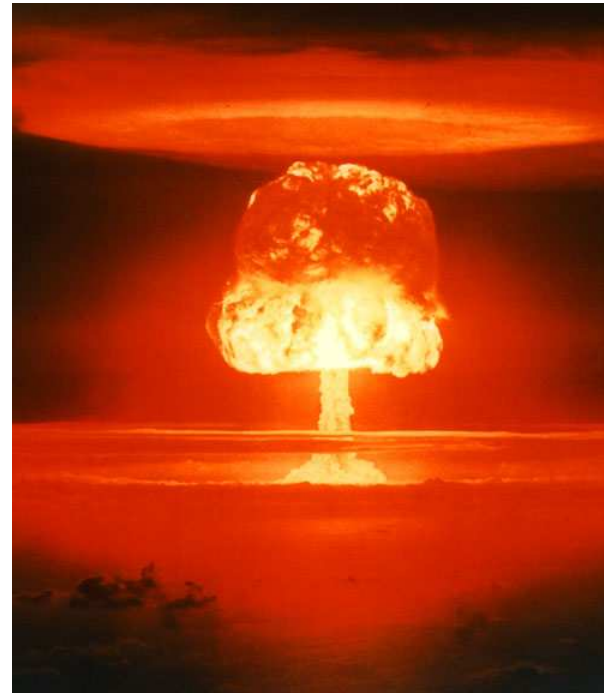
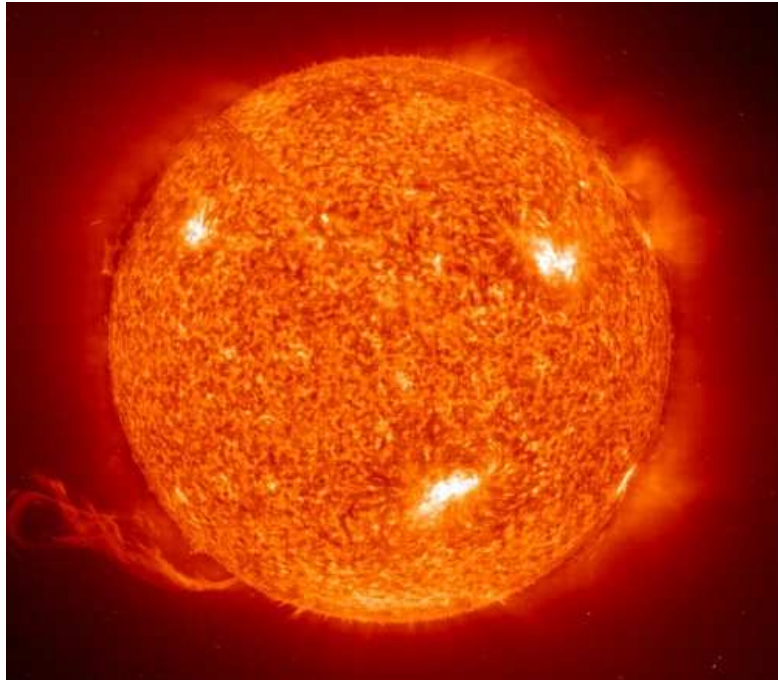
- Em cada ponto do espaço(-tempo) existe um **espaço interno**, i.e. um espaço vectorial complexo equipado com um produto interno hermitiano.
- As **forças fundamentais** são dadas pela curvatura do transporte paralelo de vectores internos.



Força electromagnética – espaço interno de dimensão 1.



Força nuclear fraca – espaço interno de dimensão 2.



Força nuclear forte – espaço interno de dimensão 3.

Galileu Galilei (1564–1642)

“A Filosofia [Ciência] está escrita neste grande livro, o Universo, que está permanentemente aberto e ao alcance do nosso olhar. Mas o livro não pode ser compreendido sem antes aprendermos a linguagem e os caracteres em que está escrito. A linguagem é a Matemática, e os caracteres são triângulos, círculos e outras figuras geométricas, sem as quais é humanamente impossível compreender uma única palavra.”

