Instituto Superior Técnico
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA I

1^{a} Ficha de Auto-avaliação

(Eng^{a} Biológica, Eng^{a} Química, Química)

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

I. (Axiomática dos reais: axiomas de corpo)

a) Mostre que $\forall a, b \in \mathbb{R}, -(a+b) = (-a) + (-b)$.

b) Modificando de modo conveniente um argumento utilizado na aula, prove que não existe nenhum racional r que satisfaça $r^2 = 3$ (ou seja, de modo menos correcto "$\sqrt{3}$ não é racional").

c) Mostre que $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{Q} \wedge y \in \mathbb{Q} \Rightarrow x + y \in \mathbb{Q}$.

d) Conclua, através de exemplos apropriados, que a proposição da alínea anterior é falsa se $\mathbb{Q}$ for substituido por $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

II. (Axiomática dos reais: axiomas de ordem)

a) Mostre que $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b \Rightarrow a < \frac{1}{2}(a+b) < b$.

b) Mostre que a soma dos cubos de quaisquer três naturais consecutivos é divizível por 9.

III. (Axiomática dos reais: axioma do supremo)

a) Seja $S \subset \mathbb{R}$ definido por $S = \{x = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}_1\}$. Justifique que S é limitado. Determine $\inf S$ e $\sup S$.

b) Considerem-se os conjuntos $A = \left\{x \in \mathbb{R} : x^3 - x^2 - x + 1 < 0\right\}$, $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e $C = \left\{x \in \mathbb{R} : x = 1 + (-1)^n/n^2, n \in \mathbb{N}_1\right\}$. Determine, caso existam, o conjunto dos minorantes, o conjunto dos majorantes, o supremo, o infimo, o máximo, o mínimo de $A, C, A \cap B$.

c) Seja $S \subset \mathbb{R}$ uma conjunto limitado. Seja $T \subset S$ não-vazio. Mostre que se tem $\inf S \leq \inf T \leq \sup T \leq \sup S$. Através de exemplos apropriados mostre que `(i)` podem verificar-se simultaneamente todas as igualdades acima, e também que `(ii)` podem verificar-se simultaneamente todas as desigualdades.