

# ANÁLISE MATEMÁTICA I

2ª Ficha de Autoavaliação

(Enga Biológica, Enga Química, Química)

## Sucessões

1. Recorrendo apenas à definição de limite de uma sucessão, demonstre que

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 + 1} = 0, \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 1}{\sqrt{2n^3 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos(n\pi)}{n^3} = 0.$$

2. Recorrendo apenas à definição de convergência, mostre que a sucessão de termo geral  $u_n = \cos(n\pi) + \cos(2n\pi)$  não é convergente.

3. Mostre, apenas recorrendo à definição de limite, que  $\lim x_n = 0$  se e só se  $\lim |x_n| = 0$ . Dê um exemplo que mostre que, em geral, a convergência da sucessão  $|x_n|$  não implica a de  $x_n$ .

4. Considere as sucessões de termos gerais

$$x_n = \frac{(-1)^n + (-1)^{n+1}}{n^2}, \quad y_n = \frac{(n+1)^3}{n}, \quad z_n = x_n y_n$$

$$u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad v_n = (-1)^n u_{2n-1}, \quad w_n = \left(n|u_n| + \frac{1}{n}\right) |u_{n+1}|$$

e indique, justificando abreviadamente as respostas,

a) as que são monótonas, as que são limitadas e as que são convergentes;  
b) o supremo, ínfimo, máximo e mínimo (se existirem) do conjunto dos termos de cada uma das sucessões consideradas.

5. Considere três sucessões  $u_n$ ,  $v_n$  e  $w_n$  sobre as quais admitimos a seguinte hipótese:  $u_n$  é limitada,  $v_n$  é não limitada e  $w_n$  é convergente. Indique para cada uma das seguintes afirmações se pode concluir que é (a) falsa, (b) verdadeira ou (c) a hipótese é insuficiente para concluir sobre a veracidade da afirmação:

1.  $u_n + v_n$  é não limitada;
2.  $u_n v_n$  é não limitada;
3.  $u_n$  é convergente;
4.  $v_n$  é não convergente;
5.  $u_n w_n$  é limitada;
6. se  $u_n \neq 0$ , para todo  $n \in \mathbb{N}_1$ , então  $\frac{w_n}{u_n}$  é limitada;
7. se  $u_n$  é convergente, então  $u_n$  é monótona;
8. se  $u_n$  é monótona, então  $u_n w_n$  é convergente

Em cada caso (a) e (b), justifique abreviadamente a resposta. Em cada caso (c) dê um exemplo em que afirmação é falsa e um exemplo em que ela é verdadeira.