Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA I

3ª Ficha de Auto-avaliação

(Engª Biológica, Engª Química, Química)

Sucessões (continuação)

6. Considere a sucessão (u_n) definida por

$$u_1 = 1, \qquad u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}.$$

Mostre que a sucessão é convergente e determine o seu limite.

7. Sejam α e β dois números positivos arbitrários. Considere a sucessão definida por

$$x_1 = \alpha, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\beta}{x_n}\right).$$

Mostre que, a partir de $n = 2$, a sucessão (x_n) é monótona decrescente. Conclua que é uma sucessão convergente e prove que[1] $\lim x_n = \sqrt{\beta}$.

8. Calcule, se existirem, ou justifique que não existem, os limites em $\mathbb{R}$ das sucessões cujos termos gerais são

$$\frac{3^{n+1} + 4^n}{4^{n+1} + 3^n}, \quad \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \left(\frac{3n+4}{3n-2}\right)^{n/4}, \quad \frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}.$$

9. Seja (y_n) uma sucessão de números reais. Diz-se que (y_n) é convergente no sentido de Cesàro[2] para um número real α se a sucessão com termo geral $(y_1 + y_2 + \cdots + y_n)/n$ convergir (no sentido usual) para α.

   a) Mostre que se (y_n) converge para zero no sentido usual, então também converge para zero no sentido de Cesàro.
   [Sugestão: para um natural arbitrário q fixado, escreva, para $n > q$, $(y_1 + \cdots + y_n)/n = (y_1 + \cdots + y_q)/n + (y_{q+1} + \cdots + y_n)/n$).]

   b) Encontre um exemplo que mostre que (y_n) ser convergente para zero no sentido de Cesàro não implica que (y_n) seja convergente no sentido usual.

---

[1] Esta sucessão constitui um processo de calcular raizes quadradas já conhecido e usado na Mesopotâmia anteriormente a 1500 A.C., embora, obviamente, não com a presente notação e rigor.

[2] Ernesto Cesàro (1859-1906), matemático italiano.