Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA I

5^{a} Ficha de Auto-avaliação

(Eng$^{\text{a}}$ Biológica, Eng$^{\text{a}}$ Química, Química)

Séries Numéricas

1. Estude a natureza das séries numéricas cujos termos gerais são os seguintes

$$\frac{4^n}{1+5^n}, \quad \frac{(1+(-1)^n)^n}{n}, \quad \frac{n^{10000}}{(1,0001)^n}, \quad \frac{1}{(1+(-1)^n)^n}, \quad (-1)^n\frac{n^2}{(n+1)^{\alpha+1}},$$

$$n^2 e^{-\sqrt[3]{n}}, \quad (-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \frac{n^{1+1/n}+(-1)^n \sin n}{n^2+3n-1}.$$

2. Considere a série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ onde $r > 0$ é um número real fixo.

a) Sendo (S_{N}) a sucessão das somas parciais da séries, determine uma expressão para o termo geral S_{N}.
b) Esclareça para que valores de r é a série dada convergente e indique, nos casos em que fôr convergente, qual o valor da sua soma.
c) Utilizando os resultados obtidos acima sobre as séries geométricas, expresse sob a forma p/q, com p e q em $\mathbb{N}_1$, os racionais dados na forma de dízima por

(i) $1,5718957189571\ldots$
(ii) $0,99999999999\ldots$

3. Considere uma sucessão (a_n) de termos não-negativos que pode ser escrita sob a forma $a_n = u_{n+p} - u_n$ para alguma sucessão (u_n) e natural positivo p.

a) Determine condições sobre a sucessão (u_n) necessárias e suficientes para garantir que a série $\sum a_n$ seja convergente. No caso de convergência, obtenha uma expressão explícita para a soma da série.

b) Utilize os resultados da alínea anterior para estudar as seguintes séries e, no caso de serem convergentes, calcular a respectiva soma:

(i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+4)}$

(ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{(n+1)} - \sqrt{n})$

(iii) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

4. Seja $\{m_1, m_2, m_3, \ldots\}$ o subonjunto de $\mathbb{N}$ constituido pelos números cujo último algarismo (o mais à direita) é igual a 4. Mostre que a série $\sum m_j$ é divergente. Se o "4" fôr substituido por "8" o resultado será o mesmo? E se $\{m_1, m_2, \ldots\}$ forem os inteiros positivos terminados em 187493?

5. Seja (a_j) uma sucessão de termos não-negativos. Prove que, se $\sum a_j$ é convergente, então $\sum a_j^\alpha$ também é convergente, desde que se tenha $\alpha > 1$. Será o resultado válido para $\alpha < 1$? Se sim, prove-o, se não, exiba um contra-exemplo.

6. Seja (θ_n) uma sucessão positiva. Seja (ξ_n) a sucessão definida por $\xi_n = (\theta_1 + \theta_2 + \cdots \theta_n)/n$. Mostre que, independentemente da natureza da série $\sum \theta_n$, a série $\sum \xi_n$ é divergente.

7. Seja (ω_n) uma sucessão decrescente com limite igual a 0.

   a) Mostre[1] que a sucessão com termo geral $b_n = (\omega_1 + \cdots + \omega_n)/n$ é também decrescente e convergente para zero.

   b) Use o resultado da alínea anterior para estudar a natureza da série

$$\omega_1 - \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) + \frac{1}{3}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) - \frac{1}{4}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4) + \cdots$$

8. Determine a natureza das séries

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + + - - + + \ldots$$

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - - - + + + \ldots$$

[1] [Sugestão: para mostrar que o limite é 0 considere um natural arbitrário q fixo e escreva, para $n > q$, $b_n = (\omega_1 + \cdots + \omega_q)/n + (\omega_{q+1} + \cdots + \omega_n)/n$).]