

ANÁLISE MATEMÁTICA I

6^a Ficha de Auto-avaliação

(Eng^a Biológica, Eng^a Química, Química)

Séries de Potências

1. Determine os intervalos de convergência das seguintes séries de potências:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} x^{n+1}, & \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}, & \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \\ \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n + 1}, & \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+a)^n}{a^{n+1}}, & \text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+1)^{2n}}{n^2 + 1}. \end{array}$$

2. Considere a série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2}$. Mostre que não é aplicável o critério de d'Alembert para a determinação do seu intervalo de convergência, e calcule-o por meio do critério de Cauchy. (Sug.: a que são iguais os coeficientes a_n da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$? Escreva os primeiros 6 coeficientes a_n).

3. Suponha que uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-2)^n$ tem raio de convergência 3. O que pode concluir acerca da convergência da série nos pontos $x = -1$ e $x = 5$? Dê um exemplo para cada um dos diferentes casos que podem ocorrer.

Continuidade e limites

1. Determine os domínios das seguintes funções e diga justificadamente se são ou não contínuas no seu domínio:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } |x^3|, & \text{b) } x \log(\sin^2 x), & \text{c) } \log \log x^2, & \text{d) } \frac{1}{1-e^{1/x}}, \\ \text{e) } \log |\tan x + \sec x|, & \text{f) } \arcsin(2^{-x+2}). \end{array}$$

2. Mostre, recorrendo à definição de continuidade, que a função $f(x) = 1/x$ é contínua em cada $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3. Suponha que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em \mathbb{R} e que $f(r) = 0$, para todo $r \in \mathbb{Q}$. Mostre que $f(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.