Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA I

7^a Ficha de Auto-avaliação

(Eng^a Biológica, Eng^a Química, Química)

Continuidade e Limites

4. Para cada uma das funções seguintes determine os pontos de continuidade e de descontinuidade,

a) $\psi(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \in \mathbb{R}^+ \\ \sin x, & \text{se } x \notin \mathbb{R}^+ \end{cases}$.

b) $\varphi(x) = (x-1)\chi_{\text{A}}(x) + \left(K + \frac{x}{1+\log x}\right)(1-\chi_{\text{A}}(x))$, onde $\chi_{\text{A}}(x)$ é a *função característica* do conjunto A, definida do seguinte modo:

$$\chi_{\text{A}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases} .$$

c) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ \sin x, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

5. Determine o valor do limite quando $x \to 0$ das seguintes funções

$$f(x) = \frac{\sinh x}{x}, \qquad g(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2}, \qquad h(x) = \frac{\tan x}{x}.$$

6. Determine o conjunto dos sublimites no ponto 0 das funções seguintes, onde $H(\cdot)$ é a função de Heaviside,

$$f(x) = H\left(\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right), \qquad \omega(x) = H(\sin x), \qquad \varphi(x) = \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x},$$

e aproveite para esclarecer quais delas, no ponto $x = 0$, são contínuas, quais são descontínuas e quais são prolongáveis por continuidade.

7. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaz $g(x+y) = g(x)g(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Mostre que se, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$, for $g(\alpha) = 0$, então g é a função nula.

b) Suponha que $g(0) \neq 0$. Mostre que se g é contínua no ponto 0 então g é contínua em todos os pontos de $\mathbb{R}$.

8. Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ e suponha que existem e são reais os limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$.

a) Prove que f é limitada em $\mathbb{R}$.

b) Suponha que $a \neq b$. Arranje um exemplo que mostre que uma função f nestas condições não tem, necessariamente, nem máximo nem mínimo em $\mathbb{R}$.

c) Se agora tivermos $a = b$ será que poderão existir funções nas condições da alínea anterior? Justifique *detalhadamente.*

9. O Teorema de Weierstrass garante-nos que uma função contínua num intervalo limitado e fechado tem aí máximo e mínimo. Se agora considerarmos que uma função está definida e é contínua num intervalo limitado semi-fechado $]a, b]$ mostre, através de exemplos apropriados, que há casos em que f tem máximo e tem mínimo, casos em que tem máximo mas não tem mínimo (e vice-versa) e casos em que não tem nem máximo nem mínimo em $]a, b]$.