Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA I

8^a Ficha de Auto-avaliação

(Eng$^{\text{a}}$ Biológica, Eng$^{\text{a}}$ Química, Química)

Cálculo Diferencial em $\mathbb{R}$. Derivadas.

1. Discuta a existência de derivada em $a = 0$ para

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{se } x \geq 0 \\ x, & \text{se } x < 0 \end{cases} ; \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{1/x}}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases} ;$$

$$h(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases} ; \qquad p(x) = x^\beta \chi_{\mathbb{Q}}(x);$$

onde α e β são constantes reais e, para cada conjunto $A \subset \mathbb{R}$, χ_A representa a função característica de A (consultar ficha 7).

2. Seja $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x - 6$.

   a) Determine os pontos do plano onde a recta tangente ao gráfico de f é horizontal.

   b) Determine os pontos do plano onde a tangente ao gráfico de f tem declive -6.

   c) Mostre que a recta $y = 12x - 17$ é tangente ao gráfico de f e determine o ponto de tangência.

3. Seja $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $f' : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ a respectiva função derivada. Determine a função derivada de cada uma das seguintes funções:

$$x \mapsto f(-x), \qquad x \mapsto f(e^x), \qquad x \mapsto f(\log(x^2+1)), \qquad x \mapsto f(f(x)).$$

4. Determine, indicando para cada caso o domínio de diferenciabilidade respectivo, as derivadas das funções seguintes:

   a) x^x, b) $(x^x)^x$, c) x^{x^x}, d) $\log\log\log x$, e) $\log|x|$,

   f) $(1+3x+3x^2)\sqrt[3]{\dfrac{3-x^2}{x^2+1}}$, g) $e^{\frac{2x^5}{\sqrt{x^2+1}}}$ h) $\log\left|x^2 - \sqrt{x^4-1}\right|$,

   i) $\log_{10}(3x+1)$, j) $\left(\sqrt[5]{x-1}\right)^{3x\log x}$, k) $\sec(x^2)\tan\sqrt{x+1}$,

   l) $\sin\tan\sqrt{x+1}$, m) $\arctan\frac{x^3}{x^2+1}$, n) $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

5. Para cada uma das seguintes funções f, calcule $f^{(n)}$ para alguns valores $n \in \mathbb{N}_1$, por forma a sugerir uma expressão geral para $f^n(x)$. Em seguida, usando o método de indução finita, demonstre essa expressão.

   a) $f(x) = \log(1+x)$;
   b) $f(x) = \sin x$, (sugestão: $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$)
   c) $f(x) = (1+x)^\alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

   Em c), o que sucede quando $\alpha \in \mathbb{N}$?

6. Mostre que as seguintes funções têm um máximo e um mínimo nos pontos indicados e, no entanto, não são diferenciáveis nesses pontos:

   a) $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{se } x > 0 \\ -x, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$;

   b) $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-3)^2}$, nos pontos $x = 3$ e $x = 0$.

7. Prove que um polinómio da forma $p(x) = x^3 - 3x + b$ não pode ter mais do que uma raiz no intervalo $[-1, 1]$ (sug.: use o teorema de Rolle).

8. Use o teorema de Rolle para provar que o polinómio $x^{102} + ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ tem no máximo duas raizes reais enquanto que $x^{101} + ax + b$ tem no máximo três raizes reais.

9. Seja $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Verifique que $f(1) = f(-1) = 0$, mas que $f'(x)$ nunca se anula no intervalo $[-1, 1]$. Explique porque só aparentemente este resultado contradiz o teorema de Rolle.

10. Use o teorema de Lagrange para mostrar que:

    a) $\log(x+1) - \log x < \frac{1}{x}$, para $x \in]0, +\infty[$;

    b) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$;

    c) $\frac{x}{1+x^2} \leq \arctan x \leq x$, para $x \in [0, +\infty[$;

    d) $8 + \frac{1}{9} < \sqrt{66} < 8 + \frac{1}{8}$.

11. Seja f uma função duas vezes diferenciável em $]0, 1[$ e contínua em $[0, 1]$. Justifique que se o gráfico de f intersectar uma recta nos pontos de abcissa 0, 1 e a, com $a \in]0, 1[$, então existe $c \in]0, 1[$ tal que $f''(c) = 0$.