Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA I

9^a Ficha de Auto-avaliação

(Eng$^{\text{a}}$ Biológica, Eng$^{\text{a}}$ Química, Química)

Cálculo Diferencial em $\mathbb{R}$.

12. Seja f uma função contínua em $[0,a]$ e diferenciável em $]0,a[$. Suponha que $f(0)=0, f'(x)>0$ e $f'(x)$ é crescente em $]0,a[$. Mostre que $f(x)/x$ é também uma função crescente em $]0,a]$.

13. Seja f diferenciável em $\mathbb{R}^+$ e suponha que existe um número real L tal que $f(x)+f'(x)\longrightarrow L$ quando $x\to+\infty$. Mostre que então tem-se $f(x)\to L$ e $f'(x)\to 0$ quando $x\to+\infty$. *(Sugestão: observe que $f(x)=e^x f(x)/e^x$.)*

14. Demonstre (usando indução finita) a seguinte consequência notável da Regra de Cauchy: Seja f uma função n vezes diferenciável num intervalo I e seja a um ponto de I no qual se verificam as igualdades $f(a)=f'(a)=f''(a)=\ldots=f^{(n-1)}(a)=0$. Então tem-se

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{(x-a)^n}=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Dê um exemplo de uma função que satisfaça as condições apresentadas.

15. Calcule o valor dos seguintes limites

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x(\log x)^2},\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{e^x},\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}e^{-1/x^2},\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{e^{1/\log x}-1},$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\arctan x}\right),\ \lim_{x\to 1}\frac{1+\cos(\pi x)}{x^3-2x^2+x},\ \lim_{x\to 0^+}x^{\sin x},\ \lim_{x\to 0^+}(\sin x)^x.$$

16. Considere a função f, contínua em $\mathbb{R}$, e definida, para $x\neq 0$, por $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$. Considere ainda a função $g(x)=\sin x$, definida em $\mathbb{R}$. Mostre que $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)/g'(x)$ não existe, mas $\lim\limits_{x\to 0}f(x)/g(x)$ existe (calcule o seu valor). Explique porque é que este exemplo não contradiz a Regra de Cauchy.

17. Para as funções seguintes determine: o domínio; o domínio de diferenciabilidade; a função primeira derivada; o comportamento da função e da sua primeira derivada em torno dos pontos fronteiros (em $\tilde{\mathbb{R}}$) do domínio e do domínio de diferenciabilidade, respectivamente; os intervalos de monotonía, os extremos (locais); o conjunto das imagens.

$$f(x)=x^2e^{-x^2},\ g(x)=x^{-1/x},\ h(x)=\min\{|x-1|,|x-2|\},$$

$$\omega(x) = \log \sin x,\ \gamma(x) = \arctan \frac{x}{1+x^2},\ \varphi(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{12} - \left(\frac{1}{x}\right)^{6},$$

$$z(x) = \frac{x}{\operatorname{ch} x},\ \psi(x) = \operatorname{argsh} x,\ \theta(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

18. Considere a função φ, contínua em $\mathbb{R}$, tal que $\varphi(x) = 2x^4 + x^4 \sin \frac{1}{x}$ se $x \neq 0$. Mostre que φ tem um mínimo em $x = 0$ mas que φ' não tem sinal fixo em nenhuma semi-vizinhança da origem.

19. Considere a função ψ definida e contínua em $\mathbb{R}$ e tal que, se $x \neq 0$, $\psi(x) = x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}$. Calcule $\psi'(0)$ e verifique que é um número positivo. Mostre que ψ *não é* monótona crescente em nenhuma vizinhança de $x = 0$. Comente este resultado atendendo ao que conhece sobre a relação entre a monotonia de uma função diferenciável e o sinal da sua primeira derivada.