Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática II

2º Exame: 14 de Julho de 1999
Eng. Ele., Eng. Bio., Eng. Quí., Ges. e Quí.
Duração - 3 horas
Apresente os cálculos

1. Calcule (3)

$$\int_0^{\pi} x^2 \operatorname{sen} x \, dx\,, \qquad \int_1^{e^2} \frac{\log x}{x}\, dx\,, \qquad \int_{1/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\,\operatorname{arcsen} x}\, dx\,.$$

2. Calcule a área da região plana, de área finita, limitada pelas linhas de equações $y = x^2$ e $y = |x|$. (1.5)

3. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{x^2} t e^{\sqrt{t}}\, dt}{\displaystyle\int_0^{x^3} (e^{\sqrt[3]{t}} - 1)\, dt}$. (1.5)

4. Calcule a série de Mac-Laurin de $\psi(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{e^t - 1}{t}\, dt$. (1)

5. Considere a função $f : D \mapsto \mathbb{R}$, em que D é o conjunto aberto $\{(x,y) : \operatorname{sen}(x^2+y^4) \neq 0\} \bigcup \{(0,0)\}$, definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{\operatorname{sen}(x^2+y^4)} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

a) Calcule os limites de f em (0,0) ao longo de todas as rectas que passam pela origem. (1.5)

b) Calcule o limite em $(0,0)$ da restrição de f ao conjunto (1.5)

$$S = \{(x,y) \in D \,:\, x = y^2 \ \wedge \ y \neq 0\}.$$

c) Estude a continuidade de f em cada ponto $(x_o, y_o) \in D$. Justifique que o domínio de diferenciabilidade de f é $D \setminus \{(0,0)\}$. (1)

d) Calcule $f'_{(1,2)}(a)$ quando $a = (0,0)$ e quando $a = ((\pi/2)^{1/2}, \pi^{1/4})$. (2)

6. Considere a função $f(x,y) = y^2 - x(x^2-1)$. Calcule e classifique os seus pontos de estacionaridade. Esta função tem extremos absolutos? Justifique. (2.5)

7. Mostre que não existe uma função $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ com derivadas parciais de 2ª ordem contínuas tal que: (1)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -\operatorname{sen} y \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = e^x.$$

V.S.F.F. →

8. Seja c um real não nulo e $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 que verifica a condição

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

a) Considere a função vectorial $\varphi(u,v) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c}\right)$. Calcule as derivadas parciais de 1ª ordem de $g = f \circ \varphi$. (2.2)

b) Mostre que existe uma função $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = h(x - cy)$. (1.3)

Resolução

1. Integrando duas vezes por partes:

$$\int_0^\pi x^2 \operatorname{sen} x\, dx = \left[-x^2 \cos x\right]_0^\pi + 2\int_0^\pi x \cos x\, dx = \pi^2 + 2\left[x \operatorname{sen} x\right]_0^\pi$$

$$-2\int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx = \pi^2 + 2\left[\cos x\right]_0^\pi = \pi^2 - 4.$$

O segundo caso é uma integração imediata:

$$\int_1^{e^2} \frac{\log x}{x}\, dx = \int_1^{e^2} \log x (\log x)'\, dx = \frac{1}{2}\left[\log^2 x\right]_1^{e^2} = 2.$$

Nota: este resultado também se obteria muito facilmente com a mudança de variável $u = \log x$.
Quanto ao terceiro integral, fazemos a mudança de variável $u = \operatorname{arcsen} x$, $u' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$:

$$\int_{1/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x} dx = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1}{u} du = \log\frac{\pi}{4} - \log\frac{\pi}{6} = \log\frac{3}{2}.$$

Note-se que também este caso se poderia ter considerado como uma integração imediata.

2. As abcissas dos ponto em que as duas curvas se intersectam são dadas por $|x| = x^2$, ou seja, $x = -1$, 0 ou 1. Observando que, $x \in [-1,1] \Rightarrow x^2 \leq |x|$, concluímos que a região mencionada consiste em todos os pontos (x,y), tais que $x \in [-1,1]$ e $x^2 \leq y \leq |x|$. Como as funções $x \mapsto |x|$ e $x \mapsto x^2$ são pares, a área pretendida é dada por,

$$\int_{-1}^1 (|x| - x^2)\, dx = 2\int_0^1 (x - x^2)\, dx = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

3. Para levantar a indeterminação $\frac{0}{0}$, usa-se a regra de Cauchy:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{x^2} te^{\sqrt{t}}\, dt}{\displaystyle\int_0^{x^3} (e^{\sqrt[3]{t}} - 1)\, dt} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\displaystyle\int_0^{x^2} te^{\sqrt{t}}\, dt\right)'}{\left(\displaystyle\int_0^{x^3} (e^{\sqrt[3]{t}} - 1)\, dt\right)'} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 e^{|x|}.2x}{(e^x - 1).3x^2}$$

$$= \frac{2}{3}\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1}.e^x = \frac{2}{3}.$$

4. Sabemos que $\psi'(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$. Como $e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots,$ obtemos $\psi'(x) = 1+\dfrac{x}{2!}+\dfrac{x^2}{3!}+\ldots$ Como sabemos que os termos desta série são iguais às derivadas dos termos da série de Mac-Laurin de $\psi(x)$, então estes últimos podem ser obtidos por primitivação daqueles. Assim, atendendo a que $\psi(0) = 0$ (o que permite ajustar a constante de primitivação),

$$\psi(x) = x + \frac{x^2}{2.2!} + \frac{x^3}{3.3!} + \cdots = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k.k!}.$$

5. a) Cada recta que passa por $(0,0)$ é dada parametricamente por $(x,y) = t(\alpha,\beta)$, com $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ não nulo, fixo, sendo $t \in \mathbb{R}$ um parâmetro arbitrário. Por um lado,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{(\alpha t)(\beta t)^2}{\operatorname{sen}\,[(\alpha t)^2 + (\beta t)^4]} &= \lim_{t\to 0} \frac{\alpha\beta^2 t^3}{\operatorname{sen}\,[t^2(\alpha^2 + \beta^4 t^2)]} \\
&= \lim_{t\to 0} \left\{ \frac{t^2(\alpha^2+\beta^4 t^2)}{\operatorname{sen}\,[t^2(\alpha^2+\beta^4 t^2)]} \times \frac{\alpha\beta^2 t}{\alpha^2+\beta^4 t^2} \right\} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\alpha\beta^2 t}{\alpha^2+\beta^4 t^2} = 0,
\end{aligned}$$

Por outro lado, quando $t = 0$, $f(\alpha 0, \beta 0) = f(0,0) = 0$. Concluímos assim que existe e é nulo o limite de f em $(0,0)$ ao longo de qualquer recta que passe pela origem.

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f|_S = \lim_{y\to 0} \frac{y^2 y^2}{\operatorname{sen}\,((y^2)^2 + y^4)} = \lim_{y\to 0} \frac{y^4}{\operatorname{sen} 2y^4} = \frac{1}{2}.$

c) Consideremos, em 1º lugar, $(x_o, y_o) \in D \setminus \{(0,0)\}$. Tanto $(x,y) \mapsto xy^2$ como $(x,y) \mapsto x^2 + y^4$ são funções polinomiais e, portanto, diferenciáveis em $\mathbb{R}^2$. Por sua vez, $u \mapsto \operatorname{sen} u$, é diferenciável em $\mathbb{R}$. Então, pelo teorema da derivada da função composta, $(x,y) \mapsto \operatorname{sen}\,(x^2+y^4)$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$. Como o quociente de duas funções diferenciáveis num ponto em que o denominador não se anule define uma função diferenciável nesse ponto, concluímos que f é diferenciável, e portanto contínua, em (x_o, y_o).

Em 2º lugar, consideremos $(x_o, y_o) = (0,0)$. Em a) concluímos que a restrição de f a cada recta passando por $(0,0)$, tem limite 0 em $(0,0)$. Por outro lado, em b) concluímos que a restrição de f a S, tem limite $1/2$ em $(0,0)$. Ora, se o limite de f em $(0,0)$ existisse, então os limites das restrições de f a todos os subconjuntos de D tendo $(0,0)$ como um ponto aderente seriam iguais.

Concluímos assim que f não tem limite em $(0,0)$. Logo, f não é contínua, e portanto não é diferenciável, em $(0,0)$.

d) Caso $a=(0,0)$. Como f não é diferenciável em $(0,0)$, usamos a definição de derivada direccional:

$$f'_{(1,2)}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,2t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{4t^2}{\operatorname{sen}(t^2+16t^4)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\left\{\frac{(t^2+16t^4)}{\operatorname{sen}(t^2+16t^4)}\times\frac{4t^2}{t^2+16t^4}\right\}=4.$$

Caso $a=((\pi/2)^{1/2},\pi^{1/4})$. Como f é diferenciável em a,

$$f'_{(1,2)}(a)=\nabla f(a).(1,2)=\frac{\partial f}{\partial x}(a)+2\frac{\partial f}{\partial y}(a).$$

Uma vez que,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a)=\left.\frac{y^2\operatorname{sen}(x^2+y^4)-2x^2y^2\cos(x^2+y^4)}{\operatorname{sen}^2(x^2+y^4)}\right|_{(x,y)=a}$$

$$=\frac{\pi^{1/2}\operatorname{sen}(3\pi/2)-\pi^{3/2}\cos(3\pi/2)}{\operatorname{sen}^2(3\pi/2)}=-\pi^{1/2}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a)=\left.\frac{2xy\operatorname{sen}(x^2+y^4)-4xy^5\cos(x^2+y^4)}{\operatorname{sen}^2(x^2+y^4)}\right|_{(x,y)=a}$$

$$=\frac{2(\pi/2)^{1/2}\pi^{1/4}\operatorname{sen}(3\pi/2)-4(\pi/2)^{1/2}\pi^{5/4}\cos(3\pi/2)}{\operatorname{sen}^2(3\pi/2)}=-\sqrt{2}\pi^{3/4},$$

concluímos que

$$f'_{(1,2)}(a)=-\sqrt{\pi}-2\sqrt{2}\sqrt[4]{\pi^3}.$$

6. Como

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-3x^2+1\qquad\text{e}\qquad\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y,$$

resulta $\nabla f(x,y)=0$ sse $(x,y)=(-3^{-1/2},0)$ ou $(x,y)=(3^{-1/2},0)$. Estes são os ponto de estacionaridade de f . Como f é de classe C^2, tentemos usar a informação dada pelos termos de 2ª ordem da respectiva fórmula de Taylor. Assim,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=-6x\quad,\quad\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=0\quad\text{e}\quad\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=2.$$

Logo, designando por $H(x,y)$ a matriz hessiana de f no ponto (x,y),

$$H(-3^{-1/2},0)=\begin{bmatrix} 2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad H(3^{-1/2},0)=\begin{bmatrix} -2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Os valores próprios de $H(-3^{-1/2},0)$ são $2\sqrt{3}$ e 2. Como são ambos estritamente positivos concluímos que f tem um mínimo local em $(-3^{-1/2},0)$. Os valores próprios de $H(3^{-1/2},0)$ são $-2\sqrt{3}$ e 2. Como são ambos não nulos e de sinais diferentes, concluímos que $(3^{-1/2},0)$ é um ponto de sela de f.
A função f não pode ter máximo absoluto porque, como se viu, não tem máximos locais. Por outro lado, não possui mínimo absoluto porque não é minorada. De facto, $f(x,0)=-x(x^2-1)\to-\infty$, quando $x\to+\infty$.

7. Se $f:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}$ tem derivadas parciais de 2^{a} ordem contínuas, então, pelo teorema de Schwarz, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ em $\mathbb{R}^2$.
Suponhamos, então, que existe uma função f que satisfaz as condições dadas no enunciado. Das igualdades do enunciado, resultam

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,y)=-\cos y \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,0)=e^x,$$

o que implica

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=-1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=1.$$

Portanto, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\neq\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$. Somos assim levados a uma contradicção. Concluímos que não existe f nas condições indicadas.

8.a) Pela definição do enunciado, $g(u,v)=f(\varphi(u,v))=f(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2c})$. Usando a regra da derivação da função composta, escrevendo $(x,y)=\varphi(u,v)$, ou seja, $x=\frac{u+v}{2}$ e $y=\frac{u-v}{2c}$, e usando $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial y}=0$, obtemos

$$\frac{\partial g}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{1}{2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{1}{2c}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial y}\right)=0,$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{1}{2}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{1}{2c}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Nota: as derivadas $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ acima são avaliadas no ponto $(x,y)=\varphi(u,v)$.

b) A condição $\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = 0$, para todo $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, implica que $g(u,v)$ é, na realidade, independente de u, ou seja, só depende de v. Assim, podemos escrever $g(u,v) = h(v)$, onde h é uma função em $\mathbb{R}$ de classe C^1. Como $x = \frac{u+v}{2}$ e $y = \frac{u-v}{2c}$, obtemos $v = x - cy$, e

$$f(x,y) = g(u,v) = h(v) = h(x - cy).$$

Nota: Esta igualdade é válida para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, dado que, para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, existe um e um só $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tal que $(x,y) = (\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c})$, ou seja, φ é invertível e a sua inversa está definida em $\mathbb{R}^2$.