Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática II

2º Teste e 1º Exame - 4 de Janeiro de 2006 - 17h
Duração: Teste 1h30m, Exame: 3h
(Cursos: LEIC, LEC, LET, LENAV)

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Calcule os integrais seguintes:

(1 val.) a) $\displaystyle\int_1^2 x \log x \, dx$

(1 val.) b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{1+x}}}{\sqrt{1+x}} \, dx$

(1 val.) c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{1+e^{2x}} \, dx.$

(1 val.) 2. Seja

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 \leq y \leq x, \, x \geq 0\}.$$

Esboce A e calcule a respectiva área.

3. Seja $f(x) = \operatorname{sen}(x^2) - x^4$.

(1 val.) a) Escreva a série de Taylor de f em $x = 0$.

(1 val.) b) Determine a derivada $f^{(40)}(0)$.

(1.5 val.) 4. Calcule $\frac{1}{1.1}$ com um erro inferior a 10^{-3}.

(1 val.) 5. Determine os pontos de estacionaridade de

$$g(x) = \int_0^{x^2} \cos(t^3) dt.$$

(1.5 val.) 6. Utilizando a fórmula de Taylor calcule

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x^3)}{\operatorname{sen}(x^2) - x^2}.$$

VSFF

2º **Teste**

(1 val.) 7. Determine o gradiente de $f(x,y) = x^2 - y^3 + 12y$ e calcule a sua derivada segundo o vector $v = (4,2)$ no ponto $(x,y) = (1,1)$.

(1.5 val.) 8. Sejam $g(u,v) = (\frac{u^2}{2}, \frac{v^2}{2}, uv)$ e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ com

$$Df(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 0 \\ z & 0 & x \end{bmatrix}.$$

Calcule $D(f \circ g)(-1,1)$.

9. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ a superfície definida por $x - x^2 - y^2 - 1 - z = 0$.

(1 val.) a) Determine o plano tangente a S no ponto $(2,1,-4)$.

(1 val.) b) Determine o ponto de S em que o respectivo plano tangente é horizontal.

10. Considere a função $g(x,y) = x^2 + y^2 - y^3$.

(1 val.) a) Determine e classifique os pontos de estacionaridade de g na região $x^2 + y^2 < 1$.

(1 val.) b) Justifique que g tem extremos absolutos na região $x^2 + y^2 \leq 1$ e determine-os.

11. Considere a equação $x^2y^3 - 2xz^2 + y^4z = 0$.

(1 val.) a) Justifique que a equação determina z como função de (x,y), ou seja $z = f(x,y)$, numa vizinhança de $(1,1,1)$.

(1 val.) b) Calcule $\nabla f(1,1)$.

(1.5 val.) 12. Sejam A e B duas superfícies compactas em $\mathbb{R}^3$. Seja $d > 0$ a distância mínima entre A e B, e sejam $p \in A, q \in B$ tais que $||p - q|| = d$. Mostre que o plano tangente a A em p é paralelo ao plano tangente a B em q.