

Análise Matemática II
2º Exame - 18 de Janeiro de 2006 - 13h
Duração: 3h
(Cursos: LEA, LCI, LEFT, LMAC, LEBM)

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Calcule os integrais seguintes:

(1 val.) a) $\int_0^3 \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}$

(1 val.) b) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2(1+x^2)}$

(1 val.) c) $\int_1^2 \log^2(x) dx$

(1 val.) 2. Esboce e calcule a área do conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 8 - x^2\}$.

(2 val.) 3. Calcule o volume do sólido representado pelo conjunto

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y < z < 1, x > 0, y > 0\}.$$

(2 val.) 4. Calcule $e^{0.2}$ com um erro inferior a 10^{-3} .

(1 val.) 5. Determine os pontos de estacionaridade da função

$$f(x) = \int_0^{\sin x} \frac{1}{1+t^{10}} dt.$$

(1.5 val.) 6. Uma harpa é formada por uma haste vertical ao longo do eixo Oy , por uma parte superior C_1 ao longo da linha $y = 2 - x$ e por uma parte inferior C_2 ao longo da linha $y = x$. Entre C_1 e C_2 estão esticadas na vertical, com um intervalo de 0.02, as cordas da harpa. Justifique que o comprimento total ℓ das cordas da harpa satisfaz a estimativa

$$100 \int_{0.02}^1 (1-x) dx \leq \ell \leq 100 \int_0^{0.98} (1-x) dx$$

(1 val.) 7. Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função $f(x, y) = x^2 - y^2 + x + y$.

(1 val.) 8. Considere a função $f(x, y, z) = e^x yz$ e seja $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma função de classe C^1 tal que $g(0, 0) = (0, 1, 2)$ e

$$Dg(0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule $\frac{\partial(f \circ g)}{\partial \vec{v}}(0, 0)$ em que $\vec{v} = (1, 2)$.

(1 val.) 9. Determine o plano tangente à superfície definida pela equação $z = \log(1 + x^2 + y^2)$, no ponto $(0, 0, 0)$.

10. Seja C a elipse definida pela equação $x^2 + 2xy + 2y^2 = 2$.

(1 val.) (a) Calcule os valores máximo e mínimo da função $f(x, y) = x$ em C .

(1 val.) (b) Uma faixa vertical em \mathbb{R}^2 é um conjunto da forma $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b\}$. Determine a menor faixa vertical que contém C .

11. Considere a equação

$$z \sin x + \sin y + y = 0.$$

(1 val.) (a) Mostre que esta equação define, numa vizinhança de $(0, 0, 1)$, y como função de (x, z) , ou seja $y = g(x, z)$, de classe C^1 .

(1.5 val.) (b) Calcule $\nabla g(0, 1)$.

(2 val.) 12. Considere a função $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x, y, z) = f(x - y, x + z)$, em que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 . Justifique que g verifica a equação

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}.$$